

1. Clairement  $\phi_g$  est linéaire. Pour tout  $f \in X$ ,

$$|\phi_g(f)| = \left| \int_a^b f(s)g(s)ds \right| \leq \|f\|_\infty \int_a^b |g(s)|ds$$

D'où  $\phi_g \in X^*$  et  $\|\phi_g\| \leq \int_a^b |g(s)|ds$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$f_n(s) = \begin{cases} n\overline{g(s)} & \text{si } |g(s)| \leq 1/n, \\ \overline{g(s)}/|g(s)| & \text{si } |g(s)| \geq 1/n \end{cases}$$

Notons que  $f_n \in X$ ,  $\|f_n\|_\infty \leq 1$ ,  $f_n(s)g(s) \in [0, \infty[$  pour tout  $s \in [a, b]$ ,

$$f_n(s)g(s) \geq 0 \geq |g(s)| - \frac{1}{n} \text{ si } |g(s)| \leq 1/n,$$

$$f_n(s)g(s) = |g(s)| \geq |g(s)| - \frac{1}{n} \text{ si } |g(s)| \geq 1/n$$

$$\text{et } |\phi_g(f_n)| = \int_a^b f_n(s)g(s)ds \geq \int_a^b |g|ds - \frac{1}{n} \int_a^b ds.$$

Par conséquent

$$\|\phi_g\| \geq |\phi_g(f_n)| \geq \int_a^b |g|ds - \frac{1}{n}(b-a) \rightarrow \int_a^b |g(s)|ds$$

$$\text{et } \|\phi_g\| \geq \int_a^b |g|ds.$$

2. Posons  $g_n(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos mt \right\}$ . En utilisant l'indication de l'énoncé, nous obtenons

$$g_n(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t - \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}t} \right\} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}$$

pour tout  $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$  (et  $g_n(0) = \pi^{-1}(\frac{1}{2} + n)$ ).

Par l'exercice 1 de la présente série,  $\phi_n \in X^*$  et

$$\begin{aligned} \|\phi_n\| &= \int_{-\pi}^{\pi} |g_n(t)|dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} \right| dt \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} \right| dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} \right| dt \stackrel{(n+\frac{1}{2})t=s}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi(n+\frac{1}{2})} \left| \frac{\sin(s)}{s} \right| ds \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin s|}{k\pi} ds = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

D'où  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\phi_n\| = \infty$ . Prouvons qu'il existe  $f \in X$  telle que la suite  $\{\phi_n(f)\}$  ne converge pas. Supposons le contraire:  $\{\phi_n(f)\}$  converge et est donc une suite bornée pour tout  $f \in X$ . En appliquant le principe de la borne uniforme à l'espace de Banach  $X = C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  (voir VI.3, VI.4 et aussi VI.9), nous obtenons  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\phi_n\| < \infty$ , ce qui est une contradiction.

Conclusion: la série de Fourier d'une fonction continue  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  ne converge pas nécessairement en  $\tau = 0$  (!).

3. Remarquons d'abord que  $g \circ T : X \rightarrow \mathbb{F}$  est bien linéaire et continue en tant que composée de deux applications linéaires et continues, et donc  $T'g$  est bien dans  $X^*$ . De plus, pour tout  $x \in X$ ,

$$|(T'g)(x)| = |g(Tx)| \leq \|g\|_{Y^*} \|Tx\|_Y \leq \|g\|_{Y^*} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X$$

et donc  $\|T'g\|_{X^*} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|g\|_{Y^*}$  pour tout  $g \in Y^*$ . Puisque  $T'$  est clairement linéaire (en  $g$ ), ceci montre que  $T' \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$  et que  $\|T'\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ .

Réciproquement, choisissons  $x_0$  quelconque dans  $X$  et montrons que

$$\|Tx_0\|_Y \leq \|T'\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)} \|x_0\|_X$$

ce qui établira l'inégalité  $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|T'\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)}$  puisque  $x_0$  est arbitraire. Si  $Tx_0 = 0$ , c'est évident et supposons donc que  $Tx_0 \neq 0$ . La Proposition V.14 donne  $G \in Y^*$  telle que  $\|G\|_{Y^*} = 1$  et  $G(Tx_0) = \|Tx_0\|_Y$ . D'où

$$\begin{aligned} \|Tx_0\|_Y &= G(Tx_0) = (T'G)(x_0) \leq \|T'G\|_{X^*} \|x_0\|_X \leq \|T'\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)} \|G\|_{Y^*} \|x_0\|_X \\ &= \|T'\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)} \|x_0\|_X \end{aligned}$$

4. Soit  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$  et  $y_1, y_2 \in Y$ . Alors, pour tout  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle_X &= \langle Tx, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle_Y = \overline{\lambda_1} \langle Tx, y_1 \rangle_Y + \overline{\lambda_2} \langle Tx, y_2 \rangle_Y \\ &= \overline{\lambda_1} \langle x, T^* y_1 \rangle_X + \overline{\lambda_2} \langle x, T^* y_2 \rangle_X = \langle x, \lambda_1 T^* y_1 + \lambda_2 T^* y_2 \rangle_X, \\ \langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 T^* y_1 - \lambda_2 T^* y_2 \rangle_X &= 0 \end{aligned}$$

et, en choisissant  $x = T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 T^* y_1 - \lambda_2 T^* y_2$ , on obtient la linéarité de  $T^*$ :  $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^* y_1 + \lambda_2 T^* y_2$ . Si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , on peut omettre la conjugaison complexe.

Pour tout  $y \in Y$ , on a

$$\forall x \in X \quad |\langle x, T^* y \rangle_X| = |\langle Tx, y \rangle_Y| \leq \|T\| \|x\|_X \|y\|_Y.$$

En choisissant  $x = T^* y$ , on a donc  $\|T^* y\|_X^2 \leq \|T\| \|T^* y\|_X \|y\|_Y$  et  $\|T^* y\|_X \leq \|T\| \|y\|_Y$ . D'où  $T^* \in \mathcal{L}(Y, X)$  et  $\|T^*\| \leq \|T\|$ . Les normes de  $T$  et  $T^*$  sont ici simplement notées par  $\|T\|$  et  $\|T^*\|$ .

De même, pour tout  $x \in X$ , on a

$$\forall y \in Y \quad |\langle Tx, y \rangle_Y| = |\langle x, T^* y \rangle_X| \leq \|x\|_X \|T^* y\|_X \leq \|x\|_X \|T^*\| \|y\|_Y.$$

En choisissant  $y = Tx$ , on a donc  $\|Tx\|_Y^2 \leq \|x\|_X \|T^*\| \|Tx\|_Y$  et  $\|Tx\|_Y \leq \|T^*\| \|x\|_X$ . D'où  $\|T\| \leq \|T^*\|$ .

5. Notons par  $m(A)$  la mesure de Lebesgue de l'ensemble mesurable  $A$ . Alors l'ouvert

$$U_n := \cup_{k \in \mathbb{N}} ]q_k - 2^{-(k+n)}, q_k + 2^{-(k+n)}[$$

satisfait  $m(U_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k-n} = 2^{1-n}$ . Comme  $E \subset U_n$ , on a  $m(E) \leq 2^{1-n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc  $m(E) = 0$ .

Clairement  $\mathbb{Q} \subset U_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q} \subset E$  et donc  $E$  est dense.

Si  $E$  était maigre,  $\mathbb{R} \setminus E \supset \cap_{n \in \mathbb{N}} V_n$  pour une certaine famille  $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  d'ouverts denses, et donc

$$\emptyset = E \cap (\mathbb{R} \setminus E) \supset (\cap_{n \in \mathbb{N}} U_n) \cap (\cap_{n \in \mathbb{N}} V_n).$$

Ainsi l'ensemble vide serait une intersection dénombrable d'ouverts denses, en contradiction avec le théorème de Baire appliqué à l'espace métrique complet  $\mathbb{R}$  (muni de la distance usuelle).