



Section de Mathématiques  
Automne 2024

# Analyse Fonctionnelle I

version provisoire du 20 septembre 2024

Veuillez svp me communiquer d'éventuelles erreurs.

Enseignant : Boris Buffoni  
D'après les notes du cours du printemps 2009 dactylographiées par  
Aurélien Mauguin

# Table des matières

|          |                                                                                           |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>0</b> | <b>Introduction : les limites de Banach</b>                                               | <b>3</b>  |
| <b>1</b> | <b>Rappels et notions de base</b>                                                         | <b>5</b>  |
| 1.1      | Les espaces topologiques. . . . .                                                         | 5         |
| 1.2      | Les espaces métriques. . . . .                                                            | 5         |
| 1.3      | Proposition. . . . .                                                                      | 6         |
| 1.4      | Les espaces vectoriels normés. . . . .                                                    | 7         |
| 1.5      | Remarque . . . . .                                                                        | 7         |
| 1.6      | Les espaces préhilbertiens. . . . .                                                       | 8         |
| 1.7      | Base algébrique, dimension, base de Schauder. . . . .                                     | 8         |
| <b>2</b> | <b>Exemples et quelques inégalités</b>                                                    | <b>10</b> |
| 2.1      | Le théorème d'approximation de Weierstrass. . . . .                                       | 10        |
| 2.2      | L'espace euclidien/hermitien $\mathbb{F}^n$ ( $n \geq 1$ ). . . . .                       | 10        |
| 2.3      | L'espace $(C([a, b], \mathbb{F}), \ \cdot\ _\infty)$ . . . . .                            | 10        |
| 2.4      | L'espace $(C([a, b], \mathbb{F}), < \cdot, \cdot >)$ . . . . .                            | 11        |
| 2.5      | L'espace $(l_\mathbb{F}^\infty, \ \cdot\ _\infty)$ . . . . .                              | 11        |
| 2.6      | Les espaces $(l_\mathbb{F}^p, \ \cdot\ _p)$ , $p \in [1, \infty[$ . . . . .               | 11        |
| 2.7      | Exposants conjugués. . . . .                                                              | 11        |
| 2.8      | Inégalité de Young. . . . .                                                               | 12        |
| 2.9      | Les espaces $L_\mathbb{R}^p(a, b)$ (cf Analyse IV). . . . .                               | 12        |
| 2.10     | Inégalités de Hölder et de Minkowski dans $L_\mathbb{R}^p(a, b)$ (cf Analyse IV). . . . . | 12        |
| 2.11     | Les espaces $L_\mathbb{C}^p(a, b)$ . . . . .                                              | 13        |
| 2.12     | Propriétés des espaces $l^p$ . . . . .                                                    | 13        |
| 2.13     | L'espace de Hilbert $l^2$ . . . . .                                                       | 13        |
| 2.14     | L'espace de Hilbert $L^2(a, b)$ . . . . .                                                 | 14        |
| 2.15     | Résumé. . . . .                                                                           | 15        |
| <b>3</b> | <b>Opérateurs linéaires</b>                                                               | <b>16</b> |
| 3.1      | Opérateurs linéaires et bornés. . . . .                                                   | 16        |
| 3.2      | Exemple : les opérateurs intégraux. . . . .                                               | 16        |
| 3.3      | Opérateurs linéaires continus. . . . .                                                    | 17        |

|          |                                                                                                   |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.4      | Théorème. . . . .                                                                                 | 17        |
| 3.5      | Norme d'un opérateur linéaire et borné. . . . .                                                   | 18        |
| 3.6      | Proposition. . . . .                                                                              | 18        |
| 3.7      | L'ensemble $\mathcal{L}(X, Y)$ . . . . .                                                          | 19        |
| 3.8      | Théorème. . . . .                                                                                 | 19        |
| 3.9      | Théorème (série de Neumann). . . . .                                                              | 20        |
| 3.10     | Théorème. . . . .                                                                                 | 21        |
| 3.11     | Opérateurs compacts. . . . .                                                                      | 22        |
| 3.12     | Proposition. . . . .                                                                              | 22        |
| 3.13     | Théorème. . . . .                                                                                 | 22        |
| 3.14     | Exemple : les opérateurs intégraux. . . . .                                                       | 23        |
| 3.15     | Suite de l'exemple . . . . .                                                                      | 24        |
| 3.16     | Lemme de Riesz . . . . .                                                                          | 24        |
| 3.17     | Théorème : sur le noyau de $T_\lambda$ ( $T$ compact, $\lambda \neq 0$ ). . . . .                 | 25        |
| 3.18     | Théorème : sur l'emboîtement des noyaux. . . . .                                                  | 26        |
| 3.19     | Théorème : sur la constance des noyaux. . . . .                                                   | 26        |
| 3.20     | Théorème : sur l'image de $T_\lambda$ . . . . .                                                   | 27        |
| 3.21     | Proposition : une implication entre l'image et le noyau. . . . .                                  | 28        |
| <b>4</b> | <b>Valeurs propres d'un opérateur linéaire, symétrique et compact</b>                             | <b>29</b> |
| 4.1      | Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres. . . . .                                       | 29        |
| 4.2      | Opérateurs symétriques. . . . .                                                                   | 29        |
| 4.3      | Exemple. . . . .                                                                                  | 29        |
| 4.4      | Proposition. . . . .                                                                              | 30        |
| 4.5      | Théorème. . . . .                                                                                 | 30        |
| 4.6      | Théorème. . . . .                                                                                 | 31        |
| 4.7      | Théorème spectral pour les opérateurs symétriques et compacts (1 <sup>ère</sup> version). . . . . | 32        |
| 4.8      | Corollaire. . . . .                                                                               | 34        |
| 4.9      | Suites orthonormées. . . . .                                                                      | 34        |
| 4.10     | Théorème spectral (2 <sup>nde</sup> version). . . . .                                             | 36        |
| 4.11     | Terminologie. . . . .                                                                             | 37        |
| 4.12     | Valeurs régulières, ensemble résolvant, spectre. . . . .                                          | 37        |
| 4.13     | Remarque . . . . .                                                                                | 37        |
| 4.14     | Proposition. . . . .                                                                              | 37        |
| <b>5</b> | <b>Espaces duaux et théorème de Hahn-Banach</b>                                                   | <b>39</b> |
| 5.1      | Espaces dual et bidual. . . . .                                                                   | 39        |
| 5.2      | Espaces congruents. . . . .                                                                       | 39        |
| 5.3      | Théorème. . . . .                                                                                 | 39        |
| 5.4      | Remarques. . . . .                                                                                | 41        |
| 5.5      | Ensembles partiellement/totalement ordonnés, majorant et élément maximal. . . . .                 | 41        |

|          |                                                                                           |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.6      | Remarques. . . . .                                                                        | 41        |
| 5.7      | Lemme de Zorn. . . . .                                                                    | 42        |
| 5.8      | Fonctionnelle sous-linéaire. . . . .                                                      | 42        |
| 5.9      | Exemples. . . . .                                                                         | 42        |
| 5.10     | Le théorème d'extension de Hahn-Banach pour des fonctionnelles sous-linéaires. . . . .    | 42        |
| 5.11     | Théorème : existence d'une limite de Banach. . . . .                                      | 44        |
| 5.12     | Le théorème d'extension de Hahn-Banach pour des fonctionnelles linéaires bornées. . . . . | 45        |
| 5.13     | Théorème. . . . .                                                                         | 46        |
| 5.14     | Proposition. . . . .                                                                      | 46        |
| 5.15     | Proposition. . . . .                                                                      | 47        |
| 5.16     | L'injection canonique. . . . .                                                            | 47        |
| 5.17     | Théorème. . . . .                                                                         | 47        |
| 5.18     | Espaces vectoriels normés réflexifs. . . . .                                              | 48        |
| 5.19     | Exemples. . . . .                                                                         | 48        |
| 5.20     | Convergence faible et convergence forte. . . . .                                          | 48        |
| 5.21     | Proposition. . . . .                                                                      | 48        |
| 5.22     | Convergence faible*. . . . .                                                              | 49        |
| 5.23     | Théorème. . . . .                                                                         | 49        |
| 5.24     | Théorème. . . . .                                                                         | 51        |
| <b>6</b> | <b>Conséquences du théorème de Baire</b>                                                  | <b>53</b> |
| 6.1      | Théorème de Baire. . . . .                                                                | 53        |
| 6.2      | Ensembles maigres. . . . .                                                                | 53        |
| 6.3      | Théorème de la borne uniforme de Banach-Steinhaus. . . . .                                | 53        |
| 6.4      | Remarque. . . . .                                                                         | 54        |
| 6.5      | Convergence ponctuelle, convergence forte et limite forte. . . . .                        | 54        |
| 6.6      | Exemple. . . . .                                                                          | 54        |
| 6.7      | Théorème. . . . .                                                                         | 55        |
| 6.8      | Rappel. . . . .                                                                           | 56        |
| 6.9      | Théorème. . . . .                                                                         | 56        |
| 6.10     | Exemple : intégration numérique. . . . .                                                  | 56        |
| 6.11     | Le théorème de l'application ouverte. . . . .                                             | 57        |
| 6.12     | Théorème préliminaire. . . . .                                                            | 57        |
| 6.13     | Théorème de l'inverse borné. . . . .                                                      | 59        |
| 6.14     | Corollaire. . . . .                                                                       | 59        |
| 6.15     | Graphe d'un opérateur. . . . .                                                            | 60        |
| 6.16     | Evn produit. . . . .                                                                      | 60        |
| 6.17     | Théorème du graphe fermé. . . . .                                                         | 60        |
| 6.18     | Définition : opérateur fermé. . . . .                                                     | 61        |
| 6.19     | Définitions. . . . .                                                                      | 61        |
| 6.20     | Théorème. . . . .                                                                         | 62        |
| 6.21     | Corollaire. . . . .                                                                       | 62        |



## Chapitre 0

# Introduction : les limites de Banach

Durant ce cours, nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  ;
- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ;
- Pour désigner une suite nous utiliserons indifféremment les notations  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $\{a_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ,  $(a_n)$ ,  $\{a_n\}$ , etc.

Soit  $l_{\mathbb{R}}^{\infty}$  l'**ensemble de toutes les suites bornées de nombres réels**, c'est-à-dire que  $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$  si  $x_n \in \mathbb{R}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et si  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty$ . Si nous munissons  $l_{\mathbb{R}}^{\infty}$  des opérations suivantes, alors c'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  :

- $(x_n)_{n \geq 1} + (y_n)_{n \geq 1} := (x_n + y_n)_{n \geq 1}$  ;
- $\alpha(x_n)_{n \geq 1} := (\alpha x_n)_{n \geq 1}$ ,

pour tout  $x, y \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'élément nul étant la suite identiquement nulle. Le sous-ensemble  $c$  des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de  $l_{\mathbb{R}}^{\infty}$ , et l'application

$$x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

pour tout  $x \in c$  est linéaire, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

pour tout  $x, y \in c$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Nous pouvons alors étendre ce concept de limite à toute suite dans  $l_{\mathbb{R}}^{\infty}$  grâce à la définition suivante ; une **limite de Banach** est une application  $F : l_{\mathbb{R}}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- (i)  $F$  est linéaire ;
- (ii)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq F(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ , pour tout  $x \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$  ;
- (iii)  $F(x) = F(Sx)$ , pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$ , où  $Sx = (x_2, x_3, \dots)$ .

**Remarques :**

- $\limsup_{n \rightarrow \infty}$  satisfait les conditions (ii) et (iii), mais n'est pas linéaire. En effet nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n + \limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} = 2 \neq 0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{(-1)^n + (-1)^{n+1}\}.$$

- La condition (ii) assure que  $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , pour tout  $x \in c$ .
- Nous prouverons plus tard l'existence d'une limite de Banach (non unique). Stefan Banach (1892-1945) est l'un des fondateurs de l'Analyse Fonctionnelle.

Une **fonctionnelle (linéaire)** est une application linéaire  $f : X \rightarrow \mathbb{F}$  d'un espace vectoriel  $X$  sur  $\mathbb{F}$  dans  $\mathbb{F}$ . Cette terminologie est surtout utilisée lorsque  $X$  est de dimension infinie.

**Exemples :** Les applications  $x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , pour  $x \in c$ , et  $x \mapsto F(x)$ , pour  $x \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$ , sont des fonctionnelles sur  $c$  et  $l_{\mathbb{R}}^{\infty}$ .

# Chapitre 1

## Rappels et notions de base

### 1.1 Les espaces topologiques.

Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est un ensemble  $X$  muni d'une famille  $\mathcal{T}$  de sous-ensembles de  $X$ , appelés les **ouverts** de  $X$ , telle que

- (i)  $\emptyset$  et  $X$  sont ouverts ;
- (ii) toute union d'ouverts est un ouvert ;
- (iii) toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

$\mathcal{T}$  est appelé un **topologie** (sur  $X$ ). On dit alors que  $(X, \mathcal{T})$  est **séparé**, ou de **Hausdorff**, si pour tout  $a, b \in X$  tels que  $a \neq b$ ,

$$\exists A \in \mathcal{T}, \exists B \in \mathcal{T} \text{ tels que } a \in A, b \in B \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

Soient deux espaces topologiques  $(X, \mathcal{T})$  et  $(X', \mathcal{T}')$ . Une application  $f : X \rightarrow X'$  est dite **continue** si, pour tout  $U \in \mathcal{T}'$ ,

$$f^{-1}(U) = \{a \in X : f(a) \in U\} \in \mathcal{T}.$$

### 1.2 Les espaces métriques.

Un **espace métrique**  $(M, d)$  consiste en un ensemble  $M \neq \emptyset$  muni d'une fonction  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  (la **métrique** ou **distance**) telle que

- (i)  $d(a, b) \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $a = b$  ;
- (ii)  $d(a, b) = d(b, a)$  ;

(iii)  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$  (**inégalité du triangle**),

pour tout  $a, b, c \in M$ . La topologie  $\mathcal{T}_d$  associée à la métrique est définie par

$$A \in \mathcal{T}_d \text{ si } \forall a \in A, \exists r \in ]0, \infty[ \text{ tel que } B(a, r) \subset A,$$

où  $B(a, r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}$  est la boule de centre  $a$  et de rayon  $r$ . En fait, on vérifie que  $B(a, r) \in \mathcal{T}_d$ . L'espace topologique  $(M, \mathcal{T}_d)$  est de Hausdorff : pour  $a \neq b$  dans  $M$ , on a  $B(a, \epsilon) \cap B(b, \epsilon) = \emptyset$  avec  $\epsilon = \frac{1}{4}d(a, b)$ . En effet, si  $x \in B(a, \epsilon) \cap B(b, \epsilon)$ , on obtiendrait la contradiction

$$0 < d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \epsilon + \epsilon = \frac{1}{2}d(a, b).$$

Si  $d(a_n, a) \rightarrow 0$ , on dit que la suite  $\{a_n\} \subset M$  **converge** vers  $a \in M$ , et on note  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  ou  $a_n \rightarrow a$ .

Si  $(M, d)$  et  $(M', d')$  sont deux espaces métriques,  $f$  est continue de  $(M, \mathcal{T}_d)$  dans  $(M', \mathcal{T}_{d'})$  si et seulement si  $f(a_n) \rightarrow f(a)$  chaque fois qu'une suite  $\{a_n\} \subset M$  converge vers un certain  $a \in M$ .

La métrique produite sur  $M \times M'$  est définie dans ce cours par

$$d_\pi((a, a'), (b, b')) = \sqrt{d(a, b)^2 + d'(a', b')^2}.$$

C'est bien une métrique. De plus  $(a_n, a'_n) \rightarrow (a, a')$  dans  $(M \times M', d_\pi)$  (cf définition ci-dessus) exactement lorsque  $a_n \rightarrow a$  dans  $(M, d)$  et  $a'_n \rightarrow a'$  dans  $(M', d')$ .

On dit que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une **suite de Cauchy** dans  $(M, d)$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m, n \geq N, d(a_m, a_n) < \epsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy. Si  $(M, d)$  a la propriété que toute suite de Cauchy est convergente, on dit que  $(M, d)$  est **complet**.

### 1.3 Proposition.

Soient un espace vectoriel  $V$  sur  $\mathbb{F}$  et une métrique  $d$  sur  $V$ . Si

(i)  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$  (invariance par translations) ;

(ii)  $d(\lambda x, 0) = |\lambda|d(x, 0)$ ,

pour tout  $x, y, z \in V$  et  $\lambda \in \mathbb{F}$ , alors les applications

$$(x, y) \rightarrow x + y \quad \text{et} \quad (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

sont continues sur  $V \times V$  et  $\mathbb{F} \times V$  munis des métriques produites ( $\mathbb{F}$  étant muni de la distance usuelle).

*Démonstration.* Il nous faut donc montrer ici que l'addition et la multiplication par un scalaire sont deux fonctions continues.  $(V, d)$  étant un espace métrique, nous allons montrer ceci grâce à la notion de continuité séquentielle rappelée précédemment. Si  $x_n \rightarrow x$  et  $y_n \rightarrow y$  dans  $(V, d)$ , alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(x_n + y_n, x + y) \leq d(x_n + y_n, x_n + y) + d(x_n + y, x + y) \\ &\stackrel{(i)}{=} d(y_n, y) + d(x_n, x) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

et donc  $x_n + y_n \rightarrow x + y$ .

Si  $x_n \rightarrow x$  dans  $(V, d)$  et  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  dans  $\mathbb{F}$ , alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(\lambda_n x_n, \lambda x) \leq d(\lambda_n x_n, \lambda_n x) + d(\lambda_n x, \lambda x) \\ &\stackrel{(i)}{=} d(\lambda_n x_n - \lambda_n x, 0) + d(\lambda_n x - \lambda x, 0) \stackrel{(ii)}{=} |\lambda_n| d(x_n - x, 0) + |\lambda_n - \lambda| d(x, 0) \\ &\stackrel{(i)}{=} |\lambda_n| d(x_n, x) + |\lambda_n - \lambda| d(x, 0) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

et donc  $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$ . □

## 1.4 Les espaces vectoriels normés.

Un **espace vectoriel normé** (evn)  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel  $X$  sur  $\mathbb{F}$  muni d'une norme  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie, par définition,

(i)  $\|x\| \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $x = 0$ ;

(ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;

(iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire),

pour tout  $x, y \in X$  et  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Elle engendre la métrique  $d(x, y) := \|x - y\|$ , et la topologie  $\mathcal{T}_d$  associée à cette métrique est notée  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ .

La métrique ainsi engendrée vérifie (i) et (ii) du paragraphe 1.3. De plus  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

Si  $(X, d)$  est complet, on dit que  $(X, \|\cdot\|)$  est un **espace de Banach**.

## 1.5 Remarque

Si une métrique  $d$  vérifie (i) et (ii) du paragraphe 1.3, alors  $\|x\| := d(x, 0)$  définit une norme.

## 1.6 Les espaces préhilbertiens.

Un **espace préhilbertien**  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sur  $\mathbb{F}$  est un espace vectoriel  $X$  sur  $\mathbb{F}$ , muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$  tel que, par définition,

- (i)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ;
- (ii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $x = 0$ ;
- (iii)  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ ,

pour tout  $x, y, z \in X$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ . Lorsque  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , le conjugué complexe peut être omis dans (i).

En posant  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , on obtient une norme  $\|\cdot\|$ , dite engendrée par le produit scalaire. Elle engendre à son tour la métrique  $d(x, y) := \|x - y\|$  et la topologie  $\mathcal{T}_d$ , que l'on note aussi  $\mathcal{T}_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  ou encore  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ .

L'**inégalité de Cauchy-Schwarz** suivante est alors valable :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

pour tout  $x, y \in X$ . Si l'espace métrique engendré  $(X, d)$  est complet, on dit dans ce cas que  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace **hilbertien** ou **de Hilbert**.

## 1.7 Base algébrique, dimension, base de Schauder.

Soient un espace vectoriel  $V$  et  $A \subset V$ .

(a) Le sous-ensemble  $A$  est dit **linéairement indépendant** si tout sous-ensemble fini de  $A$  est linéairement indépendant.

(b) L'**espace vectoriel engendré** par  $A$ , noté  $\text{span } A$ , est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires obtenues à partir de tout sous-ensemble fini de  $A$ .

(c) Un ensemble linéairement indépendant  $A$  tel que  $\text{span } A = V$  est appelé une **base algébrique** de  $V$  (ou **base de Hamel**).

(d)  $V$  est de **dimension finie** si et seulement si  $V$  admet une base algébrique  $A$  de cardinalité finie. Sinon,  $V$  est dit de **dimension infinie**.

**Remarque :** Si  $V$  est de dimension finie, toutes les bases algébriques ont même cardinalité, appelée dimension de  $V$  et notée  $\dim V$ .

(e) Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un evn. Une suite  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  est dite **base de Schauder** si, pour tout  $x \in X$ , il existe une unique suite  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{F}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j\| = 0$ . On note alors  $x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j e_j$ .

## Chapitre 2

# Exemples et quelques inégalités

### 2.1 Le théorème d'approximation de Weierstrass.

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$  et soit  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Alors, pour toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{F}$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un polynôme  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{F}$  tel que  $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$ .

*Démonstration.* Voir le cours d'Analyse Avancée IV. □

### 2.2 L'espace euclidien/hermitien $\mathbb{F}^n$ ( $n \geq 1$ ).

Pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dans  $\mathbb{F}^n$ , soit

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

(si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , on peut omettre le conjugué complexe). Alors  $(\mathbb{F}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace de Hilbert.

### 2.3 L'espace $(C([a, b], \mathbb{F}), \|\cdot\|_\infty)$ .

Pour  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$ , soit l'ensemble  $C([a, b], \mathbb{F})$  des fonctions continues  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{F}$  (on note aussi simplement  $C[a, b]$ ). C'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{F}$  ( $= \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), avec

$$(f + g)(t) := f(t) + g(t) \quad \text{et} \quad (\alpha f)(t) := \alpha f(t),$$

pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f, g \in C[a, b]$  et  $\alpha \in \mathbb{F}$

La norme du max est définie par

$$\|f\|_\infty := \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Au cours d'Analyse Avancée II, on a vu que  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach. De plus il est séparable, autrement dit il existe un ensemble dénombrable et dense  $D \subset C[a, b]$  (cf série 2).

## 2.4 L'espace $(C([a, b], \mathbb{F}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

Cette fois,  $C[a, b]$  (où  $-\infty < a < b < \infty$ ) est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

De nouveau, lorsque  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , le conjugué complexe peut être omis. On laisse en exercice le fait de vérifier que c'est bien un produit scalaire.

La norme engendrée est souvent notée  $\|\cdot\|_2$ . Muni de ce produit scalaire,  $(C([a, b], \mathbb{F}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est séparable (cf série 2), mais pas complet. On notera aussi  $(C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

## 2.5 L'espace $(l_\mathbb{F}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ .

On définit  $l_\mathbb{F}^\infty$  comme l'ensemble des suites  $\xi = (\xi_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{F}$  telles que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n| < \infty$ . Pour  $\xi \in l_\mathbb{F}^\infty$ , on pose

$$\|\xi\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|.$$

Nous admettrons que  $(l_\mathbb{F}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach. Il est de dimension infinie, mais pas séparable (cf série 2). On notera également  $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ .

## 2.6 Les espaces $(l_\mathbb{F}^p, \|\cdot\|_p)$ , $p \in [1, \infty[$ .

Pour  $1 \leq p < \infty$ ,  $l_\mathbb{F}^p$  est l'ensemble des suites  $\xi = (\xi_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{F}$  telles que  $\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p < \infty$ . Pour  $\xi \in l_\mathbb{F}^p$ , on pose

$$\|\xi\|_p := \left( \sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous admettrons que  $(l_\mathbb{F}^p, \|\cdot\|_p)$  est un espace de Banach. On note aussi  $(l^p, \|\cdot\|_p)$ .

## 2.7 Exposants conjugués.

On dit que  $p, q \in [1, \infty]$  sont des **exposants conjugués** si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On utilise ici la convention que  $1/\infty = 0$ . Observons que si  $1 < p, q < \infty$ , on a alors  $pq = p + q$ ,  $(p-1)q = p$  et  $(p-1)(q-1) = 1$ . On note  $p' := q$  et  $q' := p$ .

## 2.8 Inégalité de Young.

Pour tout  $x, y \geq 0$  et  $1 < p < \infty$ , nous savons par le cours d'Analyse IV que

$$x^{1/p} y^{1/p'} \leq \frac{1}{p} x + \frac{1}{p'} y.$$

En posant alors  $x = a^p$  et  $y = b^{p'}$  avec  $a, b \geq 0$ , on obtient l'**inégalité de Young**

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

## 2.9 Les espaces $L_{\mathbb{R}}^p(a, b)$ (cf Analyse IV).

Soient  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Pour  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable, on pose

$$\|f\|_{L_{\mathbb{R}}^p} := \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty]$$

si  $p \in [1, \infty[$ , et

$$\|f\|_{L_{\mathbb{R}}^\infty} := \supess\{|f|\} = \inf\{\alpha \in [0, \infty] : |f(x)| \leq \alpha \text{ p.p.}\} \in [0, \infty].$$

On note

$$L_{\mathbb{R}}^p(a, b) := \{f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \|f\|_{L_{\mathbb{R}}^p} < \infty\}$$

pour  $p \in [1, \infty]$ . On pose également la convention que deux fonctions égales presque partout sont identifiées.

Alors  $(L_{\mathbb{R}}^p(a, b), \|\cdot\|_{L_{\mathbb{R}}^p})$  est un espace de Banach sur  $\mathbb{R}$  (voir le cours d'Analyse IV). On notera aussi  $L^p(a, b)$ ,  $\|\cdot\|_{L^p}$ ,  $\|\cdot\|_p$ .

## 2.10 Inégalités de Hölder et de Minkowski dans $L_{\mathbb{R}}^p(a, b)$ (cf Analyse IV).

**Hölder :** Si  $f \in L_{\mathbb{R}}^p(a, b)$  et  $g \in L_{\mathbb{R}}^{p'}(a, b)$  avec  $p \in [1, \infty]$ , alors  $fg \in L_{\mathbb{R}}^1(a, b)$  et

$$\|fg\|_{L_{\mathbb{R}}^1} \leq \|f\|_{L_{\mathbb{R}}^p} \|g\|_{L_{\mathbb{R}}^{p'}}.$$

**Minkowski :** Si  $f, g \in L_{\mathbb{R}}^p(a, b)$  avec  $p \in [1, \infty]$ , alors  $f + g \in L_{\mathbb{R}}^p(a, b)$  et

$$\|f + g\|_{L_{\mathbb{R}}^p} \leq \|f\|_{L_{\mathbb{R}}^p} + \|g\|_{L_{\mathbb{R}}^p}.$$

L'inégalité de Minkowski s'interprète comme étant l'inégalité du triangle dans  $L_{\mathbb{R}}^p(a, b)$ .

## 2.11 Les espaces $L_{\mathbb{C}}^p(a, b)$ .

Soient  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Une fonction  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  est mesurable si, par définition,  $f = f_1 + if_2$  avec  $f_1, f_2 : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables. Dans ce cas,  $|f| : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  est aussi mesurable. Pour  $p \in [1, \infty]$ , on pose alors

$$\|f\|_{L_{\mathbb{C}}^p} := \| |f| \|_{L_{\mathbb{R}}^p} \in [0, \infty],$$

et

$$L_{\mathbb{C}}^p(a, b) := \{f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } \|f\|_{L_{\mathbb{C}}^p} < \infty\}.$$

On pose également la convention que deux fonctions égales presque partout sont identifiées.

En particulier, on a  $f \in L_{\mathbb{C}}^1(a, b)$  ssi  $f_1, f_2 \in L_{\mathbb{R}}^1(a, b)$ , auquel cas on définit

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b f_1(x)dx + i \int_a^b f_2(x)dx.$$

Pour  $f \in L_{\mathbb{C}}^p(a, b)$  et  $g \in L_{\mathbb{C}}^{p'}(a, b)$ , on obtient que  $fg \in L_{\mathbb{C}}^1(a, b)$  et

$$\|fg\|_{L_{\mathbb{C}}^1} = \| |f| |g| \|_{L_{\mathbb{R}}^1} \stackrel{\S 2.10}{\leq} \| |f| \|_{L_{\mathbb{R}}^p} \| |g| \|_{L_{\mathbb{R}}^{p'}} = \|f\|_{L_{\mathbb{C}}^p} \|g\|_{L_{\mathbb{C}}^{p'}},$$

et donc l'inégalité de Hölder reste valable. Il en va de même pour l'inégalité de Minkowski. Il en résulte alors que  $(L_{\mathbb{C}}^p(a, b), \|\cdot\|_{L_{\mathbb{C}}^p})$  est un evn sur  $\mathbb{C}$  et c'est même un espace de Banach (comme lorsque  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ). On notera aussi  $L^p(a, b)$ ,  $\|\cdot\|_{L^p}$ ,  $\|\cdot\|_p$ , comme dans le cas réel.

## 2.12 Propriétés des espaces $l^p$ .

Pour  $p \in [1, \infty]$ ,  $(l_{\mathbb{F}}^p, \|\cdot\|_p)$  est un espace de Banach. De plus on a également

**Hölder :** Si  $\xi \in l_{\mathbb{F}}^p$  et  $\eta \in l_{\mathbb{F}}^{p'}$ , alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leq \|\xi\|_p \|\eta\|_{p'}.$$

**Minkowski :** Si  $\xi \in l_{\mathbb{F}}^p$  et  $\eta \in l_{\mathbb{F}}^p$ , alors  $\xi + \eta \in l_{\mathbb{F}}^p$  et

$$\|\xi + \eta\|_p \leq \|\xi\|_p + \|\eta\|_p$$

## 2.13 L'espace de Hilbert $l^2$ .

Dans  $l^2$ , considérons  $\langle \cdot, \cdot \rangle : l^2 \times l^2 \rightarrow \mathbb{F}$  défini par

$$\langle \xi, \eta \rangle := \sum_{j \in \mathbb{N}} \xi_j \bar{\eta}_j$$

(lorsque  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , le conjugué complexe peut être omis). L'inégalité de Hölder pour  $p = 2$  donne

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j \bar{\eta}_j| = \sum_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j| |\eta_j| \leq \|\xi\|_2 \|\eta\|_2 < \infty,$$

et donc  $\langle \xi, \eta \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \xi_j \bar{\eta}_j$  existe dans  $\mathbb{F}$  (cf série 2, exo 3). On vérifie facilement que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire. Comme

$$\langle \xi, \xi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j|^2 = \|\xi\|_2^2$$

pour tout  $\xi \in l^2$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  engendre la norme  $\|\cdot\|_2$  du paragraphe 2.6. Comme  $(l^2, \|\cdot\|_2)$  est complet,  $(l^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace de Hilbert.

## 2.14 L'espace de Hilbert $L^2(a, b)$ .

Dans  $L^2(a, b)$ , la norme  $\|\cdot\|_{L^2}$  est engendrée par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle: L^2(a, b) \times L^2(a, b) \rightarrow \mathbb{F}$  suivant :

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx,$$

où le conjugué complexe peut être omis si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ . L'inégalité de Hölder donne

$$\int_a^b |f \bar{g}| dx = \int_a^b |f| |g| dx \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} < \infty,$$

et donc  $\langle f, g \rangle \in \mathbb{F}$  est bien défini.

Comme  $(L^2(a, b), \|\cdot\|_{L^2})$  est complet,  $(L^2(a, b), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace de Hilbert. C'est le complété de  $(C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (cf paragraphe 2.4) lorsque  $-\infty < a < b < +\infty$ .

## 2.15 Résumé.

| Notations                                                                                                                   | Complet ? | Séparable ? | Inégalités (en plus de la triangulaire)                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $(\mathbb{F}^n, <.,. >), \mathbb{F}^n$                                                                                      | Oui       | Oui         | Cauchy-Schwarz, Young                                                    |
| $(C([a, b], \mathbb{F}), \ \cdot\ _\infty),$<br>$(C[a, b], \ \cdot\ _\infty),$<br>$C[a, b],$<br>$-\infty < a < b < +\infty$ | Oui       | Oui         |                                                                          |
| $(C([a, b], \mathbb{F}), <.,. >),$<br>$(C[a, b], <.,. >),$<br>$C[a, b],$<br>$-\infty < a < b < +\infty$                     | Non       | Oui         | Cauchy-Schwarz                                                           |
| $(l_\mathbb{F}^\infty, \ \cdot\ _\infty),$<br>$(l^\infty, \ \cdot\ _\infty), l^\infty$                                      | Oui       | Non         | Minkowski (=triangulaire)<br>Hölder (en relation avec $l_\mathbb{F}^1$ ) |
| $(l_\mathbb{F}^p, \ \cdot\ _p), (l^p, \ \cdot\ _p),$<br>$l^p, p \in [1, \infty[$                                            | Oui       | Oui         | Hölder, Minkowski                                                        |
| $L_\mathbb{R}^p(a, b), L^p(a, b),$<br>$\ \cdot\ _{L^p}, \ \cdot\ _p, p \in [1, \infty]$                                     | Oui       |             | Hölder, Minkowski                                                        |
| $L_\mathbb{C}^p(a, b), L^p(a, b),$<br>$\ \cdot\ _{L^p}, \ \cdot\ _p, p \in [1, \infty]$                                     | Oui       |             | Hölder, Minkowski                                                        |
| $l^2$                                                                                                                       | Oui       | Oui         | Cauchy-Schwarz, Minkowski                                                |
| $L^2(a, b),$<br>$-\infty \leq a < b \leq +\infty$                                                                           | Oui       | Oui         | Cauchy-Schwarz, Minkowski                                                |

## Chapitre 3

# Opérateurs linéaires

### 3.1 Opérateurs linéaires et bornés.

Soient des evn  $(X, \|\cdot\|_X)$  et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  sur le même corps  $\mathbb{F}$ . Un **opérateur linéaire**  $L : X \rightarrow Y$  est une application telle que

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Lx_1 + \alpha_2 Lx_2$$

pour tout  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$  et  $x_1, x_2 \in X$ . On note aussi  $L : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ . L'**image** de  $L$  est définie par

$$R(L) := \{Lx : x \in X\} \subset Y,$$

et le **noyau** de  $L$  par

$$N(L) := \{x \in X : Lx = 0\} \subset X.$$

Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels. Un opérateur linéaire  $L : X \rightarrow Y$  est **borné** si, par définition,

$$\exists M \in [0, \infty) \text{ tel que } \forall x \in X, \|Lx\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

On utilise aussi les notations  $N(L) = \ker(L)$  et  $R(L) = \operatorname{im}(L) = \operatorname{range}(L) = \operatorname{rge}(L)$ .

### 3.2 Exemple : les opérateurs intégraux.

Soit  $-\infty < a < b < \infty$  et  $k \in C([a, b]^2, \mathbb{F})$ . Pour  $f \in C([a, b], \mathbb{F})$ , on définit la fonction  $Kf \in C([a, b], \mathbb{F})$  par

$$(Kf)(s) := \int_a^b k(s, t) f(t) dt, \quad s \in [a, b].$$

Alors

$$K : (C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

est linéaire et borné.

Vérifions l'aspect "borné" :

$$\begin{aligned}
\|Kf\|_2^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b k(s,t)f(t)dt \right|^2 ds \leq \int_a^b \left( \int_a^b |k(s,t)||f(t)|dt \right)^2 ds \\
&\stackrel{C-S}{\leq} \int_a^b \left( \int_a^b |k(s,t)|^2 dt \int_a^b |f(t)|^2 dt \right) ds \\
&= \int_a^b \int_a^b |k(s,t)|^2 ds dt \int_a^b |f(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

On peut choisir  $M = (\int_a^b \int_a^b |k(s,t)|^2 ds dt)^{1/2}$  dans la définition du paragraphe précédent, on obtient alors que  $\|Kf\|_2 \leq M\|f\|_2$  pour tout  $f \in C[a,b]$ .

**Remarque.** De même,  $K : (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$  est borné. Voir la série 3.

### 3.3 Opérateurs linéaires continus.

L'opérateur linéaire  $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$  est dit **continu** en  $x \in X$  si  $Tx_n \rightarrow Tx$  dans  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  chaque fois que  $x_n \rightarrow x$  dans  $(X, \|\cdot\|_X)$ . Si  $T$  est continu en tout  $x \in X$ , on dit que  $T$  est continu (sur  $X$ ).

### 3.4 Théorème.

Pour un opérateur linéaire  $T : X \rightarrow Y$ , les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (a)  $T$  est borné ;
- (b)  $T$  est continu ;
- (c)  $T$  est continu en un point ;
- (d)  $\sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} < \infty$ .

*Démonstration.* (a)  $\Rightarrow$  (b) : Soit  $M \in [0, \infty)$  tel que, pour tout  $x \in X$ ,

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Pour tout  $p \in X$  et toute suite  $\{x_n\} \subset X$  telle que  $x_n \rightarrow p$ , on a

$$\|Tx_n - Tp\|_Y = \|T(x_n - p)\|_Y \leq M\|x_n - p\|_X \rightarrow 0,$$

d'où  $Tx_n \rightarrow Tp$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c) : Evident.

(c)  $\Rightarrow$  (d) : Supposons qu'il existe  $p \in X$  tel que  $Tx_n \rightarrow Tp$  pour toute suite  $\{x_n\} \subset X$  telle que  $x_n \rightarrow p$ . Par l'absurde, supposons aussi que  $\sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} = \infty$ . Il existe donc  $\{z_n\} \subset X$  telle que  $\|z_n\|_X \leq 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tz_n\|_Y = \infty$ . Posons

$$x_n = p + \frac{z_n}{\|Tz_n\|_Y}.$$

On obtient  $x_n \rightarrow p$ , mais  $\|Tx_n - Tp\|_Y = \|T(z_n/\|Tz_n\|_Y)\|_Y = 1$ , qui ne converge pas vers 0. Nous avons donc obtenu une contradiction.

(d)  $\Rightarrow$  (a) : Pour  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &= \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \|x\|_X \\ &\leq \sup_{\|z\|_X \leq 1} \|Tz\|_Y \|x\|_X = M\|x\|_X, \end{aligned}$$

où  $M = \sup_{\|z\|_X \leq 1} \|Tz\|_Y$ . Ceci reste vrai pour  $x = 0$ . □

### 3.5 Norme d'un opérateur linéaire et borné.

Si  $L : X \rightarrow Y$  est linéaire et borné, sa **norme** est définie par

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Lx\|_Y < \infty \quad (\text{cf théorème 3.4}).$$

**Exemple :** au §3.2, l'opérateur  $K : (C[a, b], < \cdot, \cdot >) \rightarrow (C[a, b], < \cdot, \cdot >)$  satisfait  $\|K\| \leq M = \{\int_a^b \int_a^b |k(s, t)|^2 ds dt\}^{1/2}$

### 3.6 Proposition.

(a) Soit  $L : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire borné. Alors, pour tout  $x \in X$ ,  $\|Lx\|_Y \leq \|L\| \|x\|_X$ .

(b) Soient deux opérateurs linéaires bornés  $L, T : X \rightarrow Y$ . Alors  $L + T : X \rightarrow Y$ , défini par  $(L + T)x = Lx + Tx$  (pour tout  $x \in X$ ), est un opérateur linéaire borné. De plus on a que  $\|L + T\| \leq \|L\| + \|T\|$ .

(c) Soient deux opérateurs linéaires bornés  $L : X \rightarrow Y$  et  $T : Y \rightarrow Z$ . Alors  $T \circ L : X \rightarrow Z$  est un opérateur linéaire borné et  $\|T \circ L\| \leq \|T\| \|L\|$ .

*Démonstration.* (a) Si  $x \neq 0$ , alors  $\|Lx\|_Y = \|L(x/\|x\|_X)\|_Y \|x\|_X \leq \|L\| \|x\|_X$ .

(b) Pour tout  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} \|(L + T)x\|_Y &\leq \|Lx\|_Y + \|Tx\|_Y \\ &\leq \|L\| \|x\|_X + \|T\| \|x\|_X = (\|L\| + \|T\|) \|x\|_X. \end{aligned}$$

On en conclut donc que  $L + T$  est borné et

$$\|L + T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(L + T)x\|_Y \leq \|L\| + \|T\|.$$

(c) Pour tout  $x \in X$ ,

$$\|(T \circ L)x\|_Z \stackrel{(a)}{\leq} \|T\| \|Lx\|_Y \stackrel{(a)}{\leq} \|T\| \|L\| \|x\|_X.$$

On en conclut donc que  $T \circ L$  est borné et

$$\|T \circ L\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(T \circ L)x\|_Z \leq \|T\| \|L\|.$$

□

### 3.7 L'ensemble $\mathcal{L}(X, Y)$ .

Soient des evn  $(X, \|\cdot\|_X)$  et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  sur  $\mathbb{F}$ . On note alors  $\mathcal{L}(X, Y)$  l'ensemble des opérateurs linéaires bornés  $L : X \rightarrow Y$ . Notons que c'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{F}$  :

- le vecteur nul est  $L = 0$  sur tout  $X$ ,
- $(L + T)x := Lx + Tx$  pour tout  $x \in X$ ,
- $(\alpha L)x := \alpha Lx$  pour tout  $x \in X$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{F}$ .

Muni de la norme  $\|L\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Lx\|_Y$ ,  $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$  est un evn (à vérifier!). Si  $X = Y$ , on note aussi  $\mathcal{L}(X)$  à la place de  $\mathcal{L}(X, X)$ .

### 3.8 Théorème.

Si  $Y$  est un espace de Banach, alors  $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$  est un espace de Banach.

*Démonstration.* Soit une suite de Cauchy  $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ , c'est-à-dire que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m \geq N, \forall n \geq N, \|T_n - T_m\| < \epsilon.$$

Pour tout  $x \in X$ ,  $\{T_n x\}$  est une suite de Cauchy dans  $Y$ , car

$$\|T_n x - T_m x\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_X.$$

Comme  $Y$  est complet,  $\{T_n x\}$  converge vers une certaine limite, notée  $\hat{T}x \in Y$ . Ceci étant valable pour tout  $x \in X$ , ceci définit un opérateur linéaire  $\hat{T} : X \rightarrow Y$  (vérifier sa linéarité).

Fixons maintenant  $\epsilon > 0$ . On sait alors qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall m \geq N, \forall n \geq N, \forall x \in X, \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \epsilon \|x\|_X \quad (\text{cf §3.6 (a)}),$$

qui s'écrit aussi

$$\forall m \geq N, \forall x \in X, \forall n \geq N, \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \epsilon \|x\|_X.$$

Pour  $x$  et  $m$  fixés, on laisse tendre  $n$  vers l'infini, ce qui donne

$$\forall m \geq N, \forall x \in X, \|(\hat{T} - T_m)x\|_Y \leq \epsilon \|x\|_X.$$

Cette dernière inégalité montre que  $\hat{T} - T_N$  est borné, et donc  $\hat{T} = (\hat{T} - T_N) + T_N$  est borné (cf §3.6 (b)). On a montré que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m \geq N, \|\hat{T} - T_m\| \leq \epsilon,$$

et donc  $T_m \rightarrow \hat{T}$  dans  $\mathcal{L}(X, Y)$ . □

### 3.9 Théorème (série de Neumann).

Soient un espace de Banach  $X$ , l'opérateur identité  $I : X \rightarrow X$ ,  $T \in \mathcal{L}(X)$  et  $\|T\| < 1$ . Alors  $S := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n T^j$  existe dans  $\mathcal{L}(X)$  (où  $T^j$  représente l'opérateur  $T$  composé  $j$  fois avec lui même, et  $T^0 = I$ ) et  $(I - T) \circ S = S \circ (I - T) = I$ .

Autrement dit,  $I - T$  est inversible,  $(I - T)^{-1} = S \in \mathcal{L}(X)$ , et finalement  $\|(I - T)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|T\|)$ .

*Démonstration.* Soit  $S_n = \sum_{j=0}^n T^j$ . Par la proposition 3.6,  $\|T^j\| \leq \|T\|^j$ . Pour  $m > n$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\| &= \left\| \sum_{j=n+1}^m T^j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^m \|T^j\| \leq \sum_{j=n+1}^m \|T\|^j \\ &= \|T\|^{n+1} \sum_{j=0}^{m-(n+1)} \|T\|^j \leq \|T\|^{n+1} \frac{1}{1 - \|T\|}. \end{aligned}$$

Etant donné  $\epsilon > 0$ , choisissons  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tel que  $\|T\|^{N+1}/(1 - \|T\|) < \epsilon$  (possible car  $\|T\| < 1$ ). Pour tout  $m > n \geq N$ , on obtient donc  $\|S_m - S_n\| < \epsilon$ .

$\epsilon$ . Ainsi  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}(X)$  et converge donc vers un certain  $S \in \mathcal{L}(X)$  (cf §3.8). De plus  $\|T^n\| \leq \|T\|^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . En prenant la limite lorsque  $n \rightarrow \infty$  dans

$$(I - T) \circ S_n = S_n \circ (I - T) = \sum_{j=0}^n T^j - \sum_{j=1}^{n+1} T^j = I - T^{n+1},$$

on obtient  $(I - T) \circ S = S \circ (I - T) = I$ . Nous avons aussi utilisé ici les égalités

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I - T) \circ S_n = (I - T) \circ S \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \circ (I - T) = S \circ (I - T)$$

dans  $\mathcal{L}(X)$ , sachant que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  dans  $\mathcal{L}(X)$ . En effet on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - T) \circ S_n - (I - T) \circ S\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - T) \circ (S_n - S)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|I - T\| \|S_n - S\| = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n \circ (I - T) - S \circ (I - T)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(S_n - S) \circ (I - T)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - S\| \|I - T\| = 0. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|S\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \|T\|^j = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

□

### 3.10 Théorème.

Soit un espace de Banach  $X$ . Alors l'ensemble

$$\{L \in \mathcal{L}(X) : L^{-1} \text{ existe dans } \mathcal{L}(X)\}$$

est ouvert dans  $\mathcal{L}(X)$ .

*Démonstration.* Preuve dans le cas  $X \neq \{0\}$  : soit un opérateur  $L \in \mathcal{L}(X)$  inversible dans  $\mathcal{L}(X)$ , et soit  $T \in \mathcal{L}(X)$  tel que  $\|L - T\| < 1/\|L^{-1}\|$ .

Observons que  $T = L - (L - T) = L \circ \{I - L^{-1} \circ (L - T)\}$ .

Comme  $\|L^{-1} \circ (L - T)\| \leq \|L^{-1}\| \|L - T\| < 1$ , le théorème 3.9 assure que  $I - L^{-1} \circ (L - T)$  est inversible dans  $\mathcal{L}(X)$ . D'où  $T = L \circ \{I - L^{-1} \circ (L - T)\}$  est inversible, son inverse étant donné par  $T^{-1} = \{I - L^{-1} \circ (L - T)\}^{-1} \circ L^{-1}$ , qui est bien un opérateur borné en tant que composition de deux opérateurs bornés (cf §3.6(c)). □

### 3.11 Opérateurs compacts.

Soient deux evn  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$ . Un opérateur linéaire  $T : X \rightarrow Y$  est dit **compact** si, pour toute suite bornée  $\{x_n\} \subset X$ , la suite  $\{Tx_n\} \subset Y$  admet une sous-suite convergente.

### 3.12 Proposition.

Soient deux evn  $X$  et  $Y$ . Tout opérateur linéaire compact  $T : X \rightarrow Y$  est borné.

*Démonstration.* Supposons que  $T : X \rightarrow Y$  n'est pas borné. Il existe donc une suite  $\{x_n\} \subset X$  telle que  $\|x_n\|_X \leq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\|_Y = \infty$  (cf théorème 3.4). Comme  $\{Tx_n\}$  n'a aucune sous-suite convergente,  $T$  ne peut être compact.  $\square$

### 3.13 Théorème.

Soient des evn  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$ , avec  $Y$  complet. Soient une suite  $\{T_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}(X, Y)$  et  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  tels que  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Si  $T_n$  est compact pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $T$  est compact.

*Démonstration.* Soit une suite bornée  $\{x_m\} \subset X$ , c'est-à-dire que

$$\exists c \in ]0, \infty[ \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}, \|x_m\|_X \leq c.$$

Comme  $T_1$  est compact,  $\{x_m\}$  a une sous-suite  $\{x_{1,m}\}$  telle que  $\{T_1 x_{1,m}\}$  converge dans  $Y$ .

Comme  $T_2$  est compact,  $\{x_{1,m}\}$  a une sous-suite  $\{x_{2,m}\}$  telle que  $\{T_2 x_{2,m}\}$  converge dans  $Y$ .

En continuant ainsi, on obtient une sous-suite  $\{x_{n,m}\}_{m \geq 1}$  de  $\{x_m\}$  telle que  $\{T_n x_{n,m}\}_{m \geq 1}$  converge, ceci pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ . De plus  $\{x_{n,m}\}_{m \geq 1}$  est une sous-suite de  $\{x_{n-1,m}\}_{m \geq 1}$  pour tout  $n \geq 2$ .

La sous-suite diagonale  $\{z_m\}_{m \geq 1} := \{x_{m,m}\}_{m \geq 1}$  est telle que  $\{z_m\}_{m \geq n}$  est une sous-suite de  $\{x_{n,m}\}_{m \geq n}$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $\{T_n z_m\}_{m \geq 1}$  converge dans  $Y$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ .

Fixons  $\epsilon > 0$  et soit  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\|T - T_p\| < \epsilon/(3c)$ . Comme  $\{T_p z_m\}_{m \geq 1}$  est une suite de Cauchy (car elle converge), il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $j, k \geq N$ ,  $\|T_p z_j - T_p z_k\|_Y < \epsilon/3$ . D'où

$$\begin{aligned} \|Tz_j - Tz_k\|_Y &\leq \|(T - T_p)z_j\|_Y + \|T_p(z_j - z_k)\|_Y + \|(T_p - T)z_k\|_Y \\ &< \frac{\epsilon}{3c}c + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3c}c = \epsilon \end{aligned}$$

si  $j, k \geq N$ . Ainsi la suite de Cauchy  $\{Tz_m\}$  converge dans l'espace de Banach  $Y$ .  $\square$

### 3.14 Exemple : les opérateurs intégraux.

Pour  $-\infty < a < b < \infty$  et  $k \in C([a, b]^2, \mathbb{F})$ , soit l'opérateur intégral  $K : C([a, b], \mathbb{F}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{F})$  défini par

$$(Kf)(s) := \int_a^b k(s, t)f(t)dt, \quad s \in [a, b].$$

Alors l'opérateur linéaire  $K : (C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  est compact.

Pour le montrer, considérons une suite bornée  $\{f_n\} \subset C[a, b]$ , c'est-à-dire que

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b |f_n(t)|^2 dt \leq M^2,$$

et considérons la suite  $\{g_n\} \subset C[a, b]$  définie par  $g_n = Kf_n$ . Le théorème d'**Ascoli-Arzelà** (cf cours "Espaces métriques et topologiques") assure que si les deux conditions suivantes sont vérifiées,

$$(H1) \sup_{n \in \mathbb{N}} \|g_n\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{a \leq s \leq b} |g_n(s)| < \infty;$$

$$(H2) \text{ la suite } \{g_n\} \text{ est équicontinue, c'est-à-dire}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall s_1, s_2 \in [a, b], \left( |s_1 - s_2| < \delta \Rightarrow |g_n(s_1) - g_n(s_2)| < \epsilon \right),$$

alors  $\{g_n\}$  admet une sous-suite qui converge dans  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ .

Commençons par vérifier (H1). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $s \in [a, b]$ , nous avons

$$\begin{aligned} |g_n(s)| &= \left| \int_a^b k(s, t)f_n(t)dt \right| \leq \int_a^b |k(s, t)||f_n(t)|dt \\ &\stackrel{C-S}{\leq} \left( \int_a^b |k(s, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|f_n\|_2 \\ &\leq \sqrt{b-a} \max_{u, v \in [a, b]} |k(u, v)| M < \infty. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant la condition (H2). Choisissons pour cela un  $\epsilon > 0$ . Puisque  $k$  est continu sur le fermé borné  $[a, b]^2$ ,  $k$  est uniformément continu. Il existe donc  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in [a, b]$ ,

$$\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (t_1 - t_2)^2} < \delta \Rightarrow |k(s_1, t_1) - k(s_2, t_2)| < \frac{\epsilon}{2M\sqrt{b-a}}.$$

D'où, pour  $s_1, s_2 \in [a, b]$  tels que  $|s_1 - s_2| < \delta$ , on a

$$\begin{aligned} |g_n(s_1) - g_n(s_2)| &\leq \int_a^b |k(s_1, t) - k(s_2, t)| |f_n(t)| dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{2M\sqrt{b-a}} \int_a^b 1 \cdot |f_n(t)| dt \\ &\stackrel{C-S}{\leq} \frac{\epsilon}{2M\sqrt{b-a}} \sqrt{\int_a^b 1^2 dt} \|f_n\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà à la suite  $\{g_n\}$  que nous nous sommes donnée. Il existe donc  $g \in C[a, b]$  et une sous-suite  $\{g_{n_j}\}$  tels que  $\|g_{n_j} - g\|_\infty \rightarrow 0$ .

### 3.15 Suite de l'exemple

Pour  $-\infty < a < b < \infty$  et  $k \in C([a, b]^2, \mathbb{F})$ , l'opérateur intégral

$$K : (C([a, b], \mathbb{F}), < \cdot, \cdot >) \rightarrow (C([a, b], \mathbb{F}), < \cdot, \cdot >)$$

est compact.

En effet, soit une suite  $\{f_n\} \subset C[a, b]$  telle que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty$ . Par le paragraphe précédent, il existe une sous-suite  $\{f_{n_j}\}$  et  $g \in C[a, b]$  tels que  $\|Kf_{n_j} - g\|_\infty \rightarrow 0$ . Il en résulte

$$\begin{aligned} \|Kf_{n_j} - g\|_2 &= \left( \int_a^b |(Kf_{n_j})(s) - g(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \int_a^b 1 ds \right)^{1/2} \|Kf_{n_j} - g\|_\infty = \sqrt{b-a} \|Kf_{n_j} - g\|_\infty \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et donc  $Kf_{n_j} \rightarrow g$  dans  $(C[a, b], < \cdot, \cdot >)$ .

**Remarque.**  $K : (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  est aussi compact (la preuve est similaire).

### 3.16 Lemme de Riesz

Soit un evn  $(X, \|\cdot\|)$  sur  $\mathbb{F}$  et deux sous espaces vectoriels  $Y, Z \subset X$  tels que  $Y \subsetneq Z$  et  $Y$  est fermé. Alors il existe  $z \in Z$  tel que

$$\|z\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall y \in Y \quad \|z - y\| \geq \frac{1}{2}.$$

*Démonstration.* Soit  $v \in Z \setminus Y$  et  $a = \inf_{y \in Y} \|v - y\|$ . Comme  $Y$  est fermé,  $a > 0$  (en effet  $a = 0$  conduirait à la contradiction  $v \in Y$ ). Choisissons  $y_0 \in Y$  tel que  $a \leq \|v - y_0\| \leq 2a$  et posons

$$z = \|v - y_0\|^{-1}(v - y_0) \in Z.$$

Alors  $\|z\| = 1$  et, pour tout  $y \in Y$ ,

$$\begin{aligned} \|z - y\| &= \|\|v - y_0\|^{-1}(v - y_0) - y\| \\ &= \|v - y_0\|^{-1} \|v - (y_0 + \|v - y_0\|y)\| \\ &\geq \|v - y_0\|^{-1} a \quad (\text{car } y_0 + \|v - y_0\|y \in Y) \\ &\geq (2a)^{-1} a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

### 3.17 Théorème : sur le noyau de $T_\lambda$ ( $T$ compact, $\lambda \neq 0$ ).

Soit un evn  $X$  sur  $\mathbb{F}$ , un opérateur linéaire compact  $T : X \rightarrow X$ ,  $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$  et  $T_\lambda := T - \lambda I$ , où  $I : X \rightarrow X$  est l'opérateur identité. Alors  $N(T_\lambda) \subset X$  est un sous-espace vectoriel fermé de dimension finie.

*Démonstration.* Comme  $T$  est compact, il est borné. Comme  $T_\lambda$  aussi est borné, donc continu, et  $\{0\}$  est un fermé de  $X$ ,  $N(T_\lambda) = (T_\lambda)^{-1}(\{0\})$  est un fermé de  $X$ .

Vérifions que  $E := \{x \in N(T_\lambda) : \|x\| \leq 1\}$  est compact. Soit une suite  $\{x_n\} \subset E$ . Comme elle est bornée et  $T$  est compact, elle admet une sous-suite  $\{x_{n_k}\}$  telle que  $\{Tx_{n_k}\}$  converge. Or  $x_{n_k} \in N(T_\lambda)$  et ainsi  $x_{n_k} = \lambda^{-1}Tx_{n_k}$  ( $\forall k \in \mathbb{N}$ ), et donc  $\{x_{n_k}\}$  converge dans  $X$ , et même dans  $E$  car  $E$  est fermé. Ceci prouve que  $E$  est compact.

Vérifions qu'il en résulte que  $N(T_\lambda)$  est de dimension finie en raisonnant par l'absurde : supposons le contraire. Il existe alors une suite  $\{x_n\} \in N(T_\lambda)$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+1} \notin Z_n := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , le lemme de Riesz assure l'existence de  $z_{n+1} \in Z_{n+1} = \text{span}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$  tel que

$$\|z_{n+1}\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall y \in Z_n \quad \|z_{n+1} - y\| \geq \frac{1}{2}.$$

On utilise ici un résultat vu en séries d'exercices qui affirme que tout sous-espace vectoriel de dimension finie (ici  $Z_n$ ) d'un evn est un fermé. D'où, pour tout  $i > j > 1$ ,  $\|z_i - z_j\| \geq 1/2$ . Ainsi la suite  $\{z_n\}_{n \geq 2} \subset E$  n'a aucune sous-suite de Cauchy et donc aucune sous-suite convergente. Ceci contredit la compacité de  $E$  établie ci-dessus.

□

### 3.18 Théorème : sur l'emboîtement des noyaux.

Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus,

$$\{0\} = N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda) \subset N(T_\lambda^2) \subset \dots \subset N(T_\lambda^n) \subset N(T_\lambda^{n+1}) \subset \dots$$

et tous ces sous-espaces vectoriels sont fermés et ont des dimensions finies, où  $T_\lambda^0 := I$ .

*Démonstration.* Pour tous  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  et  $x \in X$ , si  $T_\lambda^n x = 0$ , alors  $T_\lambda^{n+1} x = T_\lambda(T_\lambda^n x) = T_\lambda 0 = 0$ . Ceci montre que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $N(T_\lambda^n) \subset N(T_\lambda^{n+1})$ . Le cas  $n = 0$  est évident.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, par la formule du binôme,

$$\begin{aligned} T_\lambda^n &= (T - \lambda I)^n = (-\lambda)^n I + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} T^k (-\lambda)^{n-k} \\ &= T \circ \left( \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} T^{k-1} (-\lambda)^{n-k} \right) + (-\lambda)^n I := T \circ S_n + (-\lambda)^n I. \end{aligned} \quad (\star)$$

Comme  $T$  est compact et  $S_n$  est borné,  $T \circ S_n$  est compact (cf séries d'exercices). Le théorème précédent appliqué à  $T \circ S_n$  et à  $-(-\lambda)^n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$  assure que

$$N(T_\lambda^n) = N(T \circ S_n + (-\lambda)^n I)$$

est un sous-espace vectoriel fermé de dimension finie.  $\square$

### 3.19 Théorème : sur la constance des noyaux.

Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus, si  $n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$  et  $N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1})$ , alors  $N(T_\lambda^{n+1}) = N(T_\lambda^{n+2})$ . De plus il existe  $n \in \mathbb{N}_0$  tel que  $N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1})$ .

*Démonstration.* Supposons que  $n \in \mathbb{N}_0$  et  $N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1})$ . Nous savons déjà que  $N(T_\lambda^{n+1}) \subset N(T_\lambda^{n+2})$ . Soit d'autre part  $x \in N(T_\lambda^{n+2})$ . Alors  $T_\lambda^{n+1}(T_\lambda x) = 0$ ,  $T_\lambda x \in N(T_\lambda^{n+1}) = N(T_\lambda^n)$  et donc  $T_\lambda^n(T_\lambda x) = 0$ . D'où  $x \in N(T_\lambda^{n+1})$ . Ceci prouve que  $N(T_\lambda^{n+2}) \subset N(T_\lambda^{n+1})$ , et donc ces sous-espaces vectoriels sont égaux.

Par l'absurde, supposons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $N(T_\lambda^n)$  est un sous-espace vectoriel fermé strictement inclus dans  $N(T_\lambda^{n+1})$ . Par le lemme de Riesz, il existe  $x_n \in N(T_\lambda^{n+1}) \setminus N(T_\lambda^n)$  tel que

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in N(T_\lambda^n) \quad \|x_n - x\| \geq \frac{1}{2}. \quad (\bullet)$$

Pour  $n > m \geq 0$ , on obtient

$$T x_n - T x_m = (T_\lambda x_n + \lambda x_n) - (T_\lambda x_m + \lambda x_m) = \lambda (x_n + \lambda^{-1} T_\lambda x_n - x_m - \lambda^{-1} T_\lambda x_m)$$

$$:= \lambda(x_n - z_n) \quad (\bullet\bullet)$$

avec

$$T_\lambda^n z_n = T_\lambda^n \left( -\lambda^{-1} T_\lambda x_n + \lambda^{-1} T_\lambda x_m + x_m \right) = 0$$

car  $x_n \in N(T_\lambda^{n+1})$  et  $x_m \in N(T_\lambda^{m+1}) \subset N(T_\lambda^n) \subset N(T_\lambda^{n+1})$ . Ainsi  $z_n \in N(T_\lambda^n)$  et

$$\|Tx_n - Tx_m\| \stackrel{(\bullet\bullet)}{=} |\lambda| \|x_n - z_n\| \stackrel{(\bullet)}{\geq} \frac{|\lambda|}{2}$$

pour tous  $n > m \geq 0$ . La suite  $\{Tx_n\}$  n'a donc aucune sous-suite de Cauchy. D'autre part la suite  $\{x_n\}$  est bornée et donc, puisque  $T$  est compact, la suite  $\{Tx_n\}$  admet une sous-suite convergente, et nous avons ainsi obtenu une contradiction.  $\square$

### 3.20 Théorème : sur l'image de $T_\lambda$ .

Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus,  $R(T_\lambda)$  est un fermé de  $X$ .

*Démonstration.* La preuve est pas l'absurde. Supposons que  $R(T_\lambda)$  n'est pas fermé. Alors il existe une suite  $\{x_n\} \subset X$  et  $y \in \overline{R(T_\lambda)} \setminus R(T_\lambda)$  tels que  $T_\lambda x_n \rightarrow y$ .

Observons d'abord que  $y \neq 0$  et donc  $T_\lambda x_n \neq 0$  pour tout  $n$  suffisamment grand. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que  $x_n \notin N(T_\lambda)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit

$$\delta_n = \inf\{\|x_n - z\| : z \in N(T_\lambda)\}.$$

Comme  $N(T_\lambda)$  est fermé et  $x_n \notin N(T_\lambda)$ ,  $\delta_n > 0$ . Soit  $z_n \in N(T_\lambda)$  tel que

$$0 < \delta_n \leq \|x_n - z_n\| \leq 2\delta_n.$$

Vérifions que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = +\infty$ . Si ce n'est pas le cas,  $\{x_n - z_n\}$  a une sous-suite bornée. Quitte à en extraire encore une sous-suite, comme  $T$  est compact, il existe une sous-suite  $\{x_{n_k} - z_{n_k}\}$  telle que  $T(x_{n_k} - z_{n_k})$  converge vers un certain  $w \in X$ . Or  $I = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)$  et donc

$$\begin{aligned} x_{n_k} - z_{n_k} &= \frac{1}{\lambda} T(x_{n_k} - z_{n_k}) - \frac{1}{\lambda} (T_\lambda x_{n_k} - T_\lambda z_{n_k}) = \frac{1}{\lambda} T(x_{n_k} - z_{n_k}) - \frac{1}{\lambda} T_\lambda x_{n_k} \\ &\rightarrow \frac{1}{\lambda} (w - y). \end{aligned}$$

Comme  $T$  est compact,  $T$  est borné, donc  $T_\lambda$  aussi, et donc  $T_\lambda$  est continu. D'où

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} T_\lambda x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_\lambda (x_{n_k} - z_{n_k}) = T_\lambda (\lambda^{-1} (w - y)) \in R(T_\lambda).$$

Ceci contredit  $y \notin R(T_\lambda)$  (cf la définition de  $y$ ).

Ainsi nous pouvons supposer que  $\delta_n \rightarrow +\infty$ . Reprenons l'idée de l'argument précédent, mais en utilisant la suite bornée  $\{\delta_n^{-1}(x_n - z_n)\}$ . Comme  $T$  est compact, il existe une sous-suite  $\{x_{n_k} - z_{n_k}\}$  telle que  $T(\delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k}))$  converge vers un certain  $w \in X$ . Or  $I = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)$  et donc

$$\begin{aligned}\delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k}) &= \frac{1}{\lambda}T(\delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k})) - \frac{1}{\lambda}T_\lambda(\delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k})) \\ &= \frac{1}{\lambda}T(\delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k})) - \frac{1}{\lambda\delta_{n_k}}T_\lambda x_{n_k} \rightarrow \frac{1}{\lambda}w\end{aligned}$$

car  $T_\lambda x_{n_k} \rightarrow y$  et  $\delta_{n_k} \rightarrow +\infty$ . Ainsi

$$w = \lim_{k \rightarrow \infty} T(\delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k})) = T(w/\lambda)$$

et  $w \in N(T_\lambda)$ . D'où, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\| x_{n_k} - z_{n_k} - \frac{\delta_{n_k}}{\lambda}w \right\| \geq \delta_{n_k}$$

et la contradiction

$$1 \leq \left\| \delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k}) - \frac{1}{\lambda}w \right\| \rightarrow 0.$$

□

### 3.21 Proposition : une implication entre l'image et le noyau.

Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus,

$$R(T_\lambda) = X \Rightarrow N(T_\lambda) = \{0\}.$$

*Démonstration.* Supposons que  $R(T_\lambda) = X$ . Pour tout  $x_1 \in N(T_\lambda)$ , choisissons  $x_2 \in X$  tel que  $T_\lambda x_2 = x_1$ , et ensuite  $x_3 \in X$  tel que  $T_\lambda x_3 = x_2$ , etc. Ceci conduit à une suite  $\{x_n\} \subset X$  telle que  $T_\lambda x_{n+1} = x_n$  pour tout  $n \geq 1$ . D'où

$$T_\lambda^{n+1}x_{n+1} = T_\lambda^n x_n = \dots = T_\lambda x_1 = 0$$

pour tout  $n \geq 1$ , et trivialement pour  $n = 0$ . Soit  $k \in \mathbb{N}_0$  tel que  $N(T_\lambda^{k+1}) = N(T_\lambda^k)$  (un tel  $k$  existe par le Théorème 3.19). Alors, comme  $T_\lambda^{k+1}x_{k+1} = 0$ , on a  $T_\lambda^k x_{k+1} = 0$  et donc

$$0 = T_\lambda^k x_{k+1} = T_\lambda^{k-1}x_k = \dots = T_\lambda^1 x_2 = x_1.$$

On a ainsi prouvé que  $T_\lambda x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ , autrement dit, que  $N(T_\lambda) = \{0\}$ . □

## Chapitre 4

# Valeurs propres d'un opérateur linéaire, symétrique et compact

### 4.1 Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres.

Soient un evn  $X$  et  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Une **valeur propre** de  $T$  est un nombre  $\lambda \in \mathbb{F}$  tel que  $Tu = \lambda u$  pour un certain  $u \in X$  non nul, qui est appelé **vecteur propre**. Si  $\lambda$  est une valeur propre,  $N(T - \lambda I)$  est l'**espace propre** correspondant à  $\lambda$ .

### 4.2 Opérateurs symétriques.

Soit un espace préhilbertien  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(X)$  est symétrique si

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

### 4.3 Exemple.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  défini par

$$z = Ax \text{ ssi } z_k = \sum_{l=1}^n \alpha_{k,l} x_l, \quad 1 \leq k \leq n,$$

où  $(\alpha_{k,l})$  est une matrice carrée avec coefficients dans  $\mathbb{F}$ .

Alors  $A$  est symétrique (par rapport au produit scalaire standard) ssi  $\alpha_{k,l} = \overline{\alpha_{l,k}}$ . En effet

$$\sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^n \alpha_{k,l} x_l \right) \overline{y_k} = \sum_{l=1}^n x_l \overline{\left( \sum_{k=1}^n \alpha_{l,k} y_k \right)}$$

pour tout  $x, y \in \mathbb{F}^n$  ssi  $\alpha_{k,l} = \overline{\alpha_{l,k}}$  pour tout  $1 \leq k, l \leq n$ .

#### 4.4 Proposition.

Soient un espace préhilbertien  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sur  $\mathbb{F}$  et un opérateur symétrique  $A \in \mathcal{L}(X)$ . Alors

- (i) toutes les valeurs propres de  $A$  sont réelles ;
- (ii) si  $Au = \lambda u$ ,  $Av = \mu v$ ,  $u \neq 0$ ,  $v \neq 0$  et  $\lambda \neq \mu$ , alors  $\langle u, v \rangle = 0$ .

*Démonstration.* (i) Si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , c'est évident. Si  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ , soient  $\lambda \in \mathbb{F}$  et  $u \in X \setminus \{0\}$  tels que  $Au = \lambda u$ . On obtient

$$\begin{aligned} \lambda \langle u, u \rangle &= \langle \lambda u, u \rangle = \langle Au, u \rangle \\ &= \langle u, Au \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle, \end{aligned}$$

et donc  $\lambda = \bar{\lambda}$ .

- (ii) Comme  $\mu \in \mathbb{R}$  (par le point (i)), on a

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu) \langle u, v \rangle &= \langle Au, v \rangle - \langle u, Av \rangle \\ &= \langle Au, v \rangle - \langle Au, v \rangle = 0, \end{aligned}$$

et donc  $\langle u, v \rangle = 0$ . □

#### 4.5 Théorème.

Soient un espace préhilbertien  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sur  $\mathbb{F}$  et  $A \in \mathcal{L}(X)$  symétrique. Alors

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x \rangle| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

**Remarque :**  $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$ , et donc  $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$  même lorsque  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ .

*Démonstration.* Pour tout  $x \in X$  tel que  $\|x\| \leq 1$ ,

$$|\langle Ax, x \rangle| \stackrel{C-S}{\leq} \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\| \|x\| \leq \|A\|,$$

et donc  $M := \sup\{|\langle Ax, x \rangle| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \leq \|A\|$ .

Notons que

$$|\langle Az, z \rangle| \leq M \|z\|^2 \text{ pour tout } z \in X. \quad (*)$$

Réciproquement, pour  $x \in X$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et  $v = Ax/\beta$ ,

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \frac{1}{4}(2\langle A(\beta x), v \rangle + 2\langle Av, \beta x \rangle) \\
&= \frac{1}{4}(\langle A(\beta x + v), \beta x + v \rangle - \langle A(\beta x - v), \beta x - v \rangle) \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{4}M(\|\beta x + v\|^2 + \|\beta x - v\|^2) \\
&= \frac{1}{4}M(\langle \beta x, \beta x \rangle + \langle v, v \rangle + \langle \beta x, v \rangle + \langle v, \beta x \rangle \\
&\quad + \langle \beta x, \beta x \rangle + \langle v, v \rangle - \langle \beta x, v \rangle - \langle v, \beta x \rangle) \\
&= \frac{M}{2}(\|\beta x\|^2 + \|v\|^2).
\end{aligned}$$

Supposons que  $Ax \neq 0$  et choisissons  $\beta = (\|Ax\|/\|x\|)^{1/2}$ . Nous obtenons alors

$$\|Ax\|^2 \leq \frac{M}{2} \left( \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \|x\|^2 + \frac{\|x\|}{\|Ax\|} \|Ax\|^2 \right) = M\|Ax\|\|x\|,$$

et donc  $\|Ax\| \leq M\|x\|$ . Ceci reste valable si  $Ax = 0$ , d'où  $\|A\| \leq M$ .  $\square$

## 4.6 Théorème.

Soient un espace préhilbertien  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  et  $A \in \mathcal{L}(X)$  qui est symétrique, compact et tel que  $\|A\| > 0$ . Alors  $\|A\|$  ou  $-\|A\|$  est une valeur propre de  $A$  (éventuellement les deux à la fois).

*Démonstration.* Par le théorème 4.5, il existe une suite  $\{x_n\}$  telle que  $\|x_n\| \leq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $m := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Ax_n, x_n \rangle = \pm\|A\|$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|Ax_n - mx_n\|^2 \\
&= \|Ax_n\|^2 + m^2\|x_n\|^2 - m\langle Ax_n, x_n \rangle - m\langle x_n, Ax_n \rangle \\
&\leq \|A\|^2 + m^2 - m\langle Ax_n, x_n \rangle - m\langle x_n, Ax_n \rangle \\
&\rightarrow \|A\|^2 + m^2 - 2m^2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Comme  $A$  est compact, il existe une sous-suite  $\{x_{n_k}\}$  telle que  $\{Ax_{n_k}\}$  converge vers un certain  $z \in X$ . On a alors que

$$\|z\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|Ax_{n_k}\| \stackrel{C.-S.}{\geq} \lim_{k \rightarrow \infty} |\langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle| = \|A\| > 0$$

et

$$\begin{aligned}
Az - mz &= \lim_{k \rightarrow \infty} (A^2x_{n_k} - mA_{n_k}) \\
&= A \lim_{k \rightarrow \infty} (Ax_{n_k} - mx_{n_k}) \stackrel{(4.1)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Ainsi  $z$  est un vecteur propre correspondant à la valeur propre  $m = \pm\|A\|$ .  $\square$

## 4.7 Théorème spectral pour les opérateurs symétriques et compacts (1<sup>ère</sup> version).

Soient un espace préhilbertien  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  et  $A \in \mathcal{L}(X)$  symétrique, compact et tel que  $\|A\| > 0$ . Alors il existe une suite finie ou infinie  $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \dots$  dans  $\mathbb{R} \times X$  telle que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$Ae_n = \lambda_n e_n, \|e_n\| = 1, \lambda_n \neq 0;$$

$$(ii) \langle e_m, e_n \rangle = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n; \end{cases}$$

(iii) Si la suite est infinie, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ ;

(iv) Si la suite est infinie, alors pour tout  $x \in X$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k\| = 0,$$

et si la suite est finie, alors pour tout  $x \in X$  on a

$$Ax = \sum \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k \text{ (somme finie sur tous les } k \text{)}.$$

(v) Chaque valeur propre non nulle de  $A$  apparaît dans la suite  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

(vi) Pour chaque  $n = 1, 2, \dots$ , l'espace  $N(A - \lambda_n I)$  est de dimension finie égale au nombre d'occurrences de  $\lambda_n$  dans la suite  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

*Démonstration.* Nous allons construire par induction une suite (finie ou infinie)  $X = X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$  de sous-espaces vectoriels et une suite  $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \dots$  dans  $\mathbb{R} \times X$  telles que

$$(a_n) \quad \langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k} \text{ et } Ae_k = \lambda_k e_k \text{ pour tous } 1 \leq j, k \leq n;$$

$$(b_n) \quad X = X_n \oplus \text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\};$$

$$(c_n) \quad X_n \perp \text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\};$$

$$(d_n) \quad R(A|_{X_n}) \subset X_n, A|_{X_n} \in \mathcal{L}(X_n), |\lambda_n| = \|A|_{X_n}\| > 0, e_n \in X_n,$$

pour  $n = 1, 2, \dots$

Dans  $(b_n)$  et  $(c_n)$ , on pose  $\text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\} = \{0\}$  si  $n = 1$ . Pour  $n = 1$ , on choisit  $X_1 = X$ ,  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  et  $e_1 \in X$  tels que (grâce au théorème 4.6)

$$Ae_1 = \lambda e_1, \|e_1\| = 1, |\lambda_1| = \|A\|.$$

Soient donnés  $n \geq 1$ ,  $X_n$ ,  $e_1, \dots, e_n$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $(a_n), (b_n), (c_n)$  et  $(d_n)$  sont vrais. On définit

$$X_{n+1} := \{x \in X : \langle x, e_1 \rangle = \dots = \langle x, e_n \rangle = 0\} \stackrel{(c_n)}{\subset} X_n.$$

Clairement  $(c_{n+1})$  est satisfait et, pour tout  $x \in X$ ,

$$x = \left( x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \in X_{n+1} \oplus \text{span}\{e_1, \dots, e_n\},$$

ce qui montre  $(b_{n+1})$ . Pour tout  $x \in X_{n+1}$ ,

$$\langle Ax, e_k \rangle = \langle x, Ae_k \rangle \stackrel{(a_n)}{=} \langle x, \lambda_k e_k \rangle = 0$$

pour  $1 \leq k \leq n$ . D'où  $R(A|_{X_{n+1}}) \subset X_{n+1}$ . De plus  $A|_{X_{n+1}} : X_{n+1} \rightarrow X_{n+1}$  est compact (car  $X_{n+1}$  est fermé) et symétrique. Si  $A|_{X_{n+1}}$  est l'opérateur nul, alors la suite  $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \dots$  est de longueur finie égale à  $n$ . Sinon le théorème 4.6 appliqué à  $X_{n+1}$  et  $A|_{X_{n+1}}$  assure l'existence de  $(\lambda_{n+1}, e_{n+1}) \in \mathbb{R} \times X_{n+1}$  tel que

$$Ae_{n+1} = \lambda_{n+1} e_{n+1}, \|e_{n+1}\| = 1, |\lambda_{n+1}| = \|A|_{X_{n+1}}\| > 0.$$

Par induction, on obtient ainsi  $X = X_1 \supset X_2 \supset \dots$  et  $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \dots$  satisfaisant  $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$  pour  $n = 1, 2, \dots$

*Preuve de (i) et (ii) :* (i) et (ii) sont clairement satisfaits.

*Preuve de (iii).* Par contradiction, supposons que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| > 0$  et choisissons une sous-suite telle que  $\inf_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_{n_k}| = c > 0$ . Alors  $\{e_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée telle que  $\{Ae_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  n'a aucune sous-suite convergente. En effet,

$$\|Ae_{n_k} - Ae_{n_l}\|^2 = \|\lambda_{n_k} e_{n_k} - \lambda_{n_l} e_{n_l}\|^2 = \|\lambda_{n_k} e_{n_k}\|^2 + \|\lambda_{n_l} e_{n_l}\|^2 \geq 2c^2$$

pour tout  $k \neq l$ . Ceci contredit la compacité de  $A$ .

(iv) Si  $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \dots$  est de longueur finie égale à  $n \geq 1$ , alors  $A|_{X_{n+1}}$  est l'opérateur nul et, pour tout  $x \in X$ ,

$$Ax - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k = A \left( x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right) = 0.$$

Supposons la suite  $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \dots$  infinie. Pour  $x \in X$ ,

$x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \in X_{n+1}$  et donc

$$\begin{aligned}
& \left\| Ax - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \left\| A \left( x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right) \right\|^2 \\
& \stackrel{(d_{n+1})}{\leq} |\lambda_{n+1}|^2 \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 \\
& \leq |\lambda_{n+1}|^2 \left( \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 \right) \\
& \stackrel{Pythagore}{=} |\lambda_{n+1}|^2 \|x\|^2 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

vu que  $\lambda_n \rightarrow 0$ .

*Preuve de (v) et (vi).* Soit  $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$  tel que  $Ax = \lambda x$ ,  $\|x\| = 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Si la suite  $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \dots$  est infinie, alors

$$\begin{aligned}
0 & \stackrel{(iv)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( Ax - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k \right) \\
& = \lambda x - \sum_{k : \lambda_k = \lambda} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k
\end{aligned}$$

car  $\langle x, e_k \rangle = 0$  si  $\lambda_k \neq \lambda$  (cf la proposition 4.4). Notons que la somme est finie car  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0 \neq \lambda$ . Puisque  $\lambda x$  est différent de zéro, on en déduit  $\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k = \lambda\} \neq \emptyset$  et  $x \in \text{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}, \lambda_k = \lambda\}$ .

L'argument est analogue lorsque la suite est finie.  $\square$

## 4.8 Corollaire.

Si de plus  $X$  est de dimension infinie et  $\overline{R(A)} = X$ , alors la suite  $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \dots$  donnée par le théorème 4.7 est infinie et  $X = \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$ .

*Démonstration.* Par le point (iv) du théorème 4.7,  $R(A) \subset \overline{\text{span}\{e_1, e_2, \dots\}}$ , et donc  $X = \overline{R(A)} \subset \overline{\text{span}\{e_1, e_2, \dots\}} \subset X$ .

Comme  $X$  est supposé de dimension infinie, la suite  $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \dots$  est infinie.  $\square$

## 4.9 Suites orthonormées.

Dans un espace préhilbertien  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , une suite  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}$  pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$  est dite **orthonormée**. Si de plus  $X = \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$ , alors  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **orthonormée totale** (voir

par exemple le §4.8).

Un ensemble  $E \subset X$  tel que  $X = \overline{\text{span } E}$  et  $\langle u, v \rangle = \delta_{u,v}$ , pour tout  $u, v \in E$ , est appelé **base orthonormée** de  $X$ .

Soit une suite orthonormée  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , alors :

1) **Inégalité de Bessel :**

$$\forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2;$$

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$  et  $y \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$  on a

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x - y\|^2;$$

3) Pour chaque  $x \in X$  fixé, on a

$$\begin{aligned} x \in \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} &\Leftrightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 &= \|x\|^2 \quad (\text{cette dernière égalité est dite } \mathbf{\acute{e}galit\acute{e} de Parseval}). \end{aligned}$$

*Démonstration.* 1) et 2) Soit  $z = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ . On a

$$\langle z, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle \quad \text{et} \quad \langle x - z, e_j \rangle = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, n,$$

et donc  $\langle x - z, z \rangle = 0$ . D'où

$$\|x - z\|^2 = \langle x - z, x \rangle = \|x\|^2 - \langle z, x \rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2,$$

ce qui prouve l'égalité dans 2). On peut alors déduire l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 - \|x - z\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Comme  $z - y \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ , on a  $\langle x - z, z - y \rangle = 0$  car  $\langle x - z, e_j \rangle = 0$  pour  $j = 1, \dots, n$ . D'où

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \langle (x - z) + (z - y), (x - z) + (z - y) \rangle \\ &= \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 \geq \|x - z\|^2. \end{aligned}$$

3) Si  $x \in \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$ , alors il existe des suites  $\{n_j\} \subset \mathbb{N}$  et  $\{y_j\} \subset X$  telles que  $y_j \in \text{span}\{e_1, \dots, e_{n_j}\}$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|y_j - x\| = 0$ . Par 2), on a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n_j} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|x - y_j\| = 0.$$

Comme  $\|x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$  est décroissante en  $n$ , on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = 0.$$

Réciproquement, si  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ , alors  $x \in \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$ . On a aussi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 &\stackrel{2)}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k. \end{aligned}$$

□

#### 4.10 Théorème spectral (2<sup>nd</sup>e version).

Soient un espace hilbertien  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de dimension infinie et  $A \in \mathcal{L}(H)$  symétrique, compact et tel que le sous-espace  $(N(A), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est séparable. Alors il existe une suite orthonormée totale  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  de  $H$  faite de vecteurs propres de  $A$  et telle que la suite  $\{\mu_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$  des valeurs propres correspondantes satisfait  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$ . De plus  $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu_k \langle x, f_k \rangle f_k$  pour tout  $x \in H$ .

*Démonstration.* Pour se fixer les idées, supposons  $R(A)$  et  $N(A)$  de dimension infinie et soit la suite  $\{(\lambda_n, e_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  donnée par le théorème 4.7. Pour  $x \in H$ , nous savons par Bessel que  $\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par l'exercice 4 de la série 7,  $\{\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy qui converge donc vers un certain  $y \in H$  (par la complétude de  $H$ ). Or

$$A(x-y) = Ax - Ay \stackrel{\S 4.7}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle A e_k = 0$$

puisque  $Ae_k = \lambda_k e_k$ , et donc  $x - y \in N(A)$ .

L'hypothèse de séparabilité assure (cf exercice 5 de la série 7) qu'il existe une suite orthonormée totale  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(N(A), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , et donc  $x - y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x - y, g_k \rangle g_k$  (cf §4.9). Comme  $Ag_j = 0$ , le point (ii) du paragraphe 4.4 nous donne  $\langle e_k, g_j \rangle = 0$  pour tout  $k, j \geq 1$  et donc  $\langle y, g_j \rangle = 0$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . D'où  $x - y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, g_k \rangle g_k$ . Posons  $f_{2n-1} := e_n$ ,  $f_{2n} := g_n$ ,  $\mu_{2n-1} = \lambda_n$  et  $\mu_{2n} = 0$ . Alors

$$\begin{aligned} x &= y + (x - y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle e_k + \langle x, g_k \rangle g_k) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \langle x, f_k \rangle f_k \end{aligned}$$

(la suite  $\{f_n\}$  est bien orthonormée totale), et

$$Ax = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \langle x, f_k \rangle Af_k = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \mu_k \langle x, f_k \rangle f_k.$$

□

## 4.11 Terminologie.

Un opérateur linéaire, borné, symétrique et défini sur un espace hilbertien est aussi appelé **borné et autoadjoint**.

## 4.12 Valeurs régulières, ensemble résolvant, spectre.

Soit un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  et  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Si  $\lambda \in \mathbb{F}$  est telle que  $T - \lambda I$  admet un inverse dans  $\mathcal{L}(X)$ ,  $\lambda$  est dite **valeur régulière** de  $T$ . L'ensemble  $\rho(T)$  des valeurs régulières est appelé l'**ensemble résolvant** de  $T$ . L'ensemble  $\sigma(T) := \mathbb{F} \setminus \rho(T)$  est appelé le **spectre** de  $T$ .

## 4.13 Remarque

Chaque valeur propre  $\lambda$  de  $T$  appartient à  $\sigma(T)$  vu que  $T - \lambda I$  n'est pas injective.

## 4.14 Proposition.

Soit un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  et  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Alors  $\sigma(T)$  est fermé, borné et  $|\lambda| \leq \|T\|$  pour tout  $\lambda \in \sigma(T)$ .

*Démonstration.* Montrons que  $\rho(T)$  est ouvert. Soit  $\lambda \in \rho(T)$ . Pour  $\mu \in \mathbb{F}$ , nous avons  $\|(T - \mu I) - (T - \lambda I)\| \leq |\mu - \lambda|$ . Par le théorème 3.10,  $T - \mu I$  est inversible dans  $\mathcal{L}(X)$  si  $|\mu - \lambda|$  est assez petit. Ainsi  $\rho(T)$  est ouvert. Supposons que  $|\lambda| > \|T\|$  et montrons que  $\lambda \in \rho(T)$ . Nous avons  $T - \lambda I = -\lambda(I - (1/\lambda)T)$  et  $\|(1/\lambda)T\| < 1$ . Par le théorème 3.9,  $I - (1/\lambda)T$  est inversible dans  $\mathcal{L}(X)$  et donc  $\lambda \in \rho(T)$ .  $\square$

## Chapitre 5

# Espaces duaux et théorème de Hahn-Banach

### 5.1 Espaces dual et bidual.

Soit un evn  $X$ . L'**espace dual** de  $X$ , noté  $X^*$ , est défini par  $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{F})$  (espace vectoriel des fonctionnelles linéaires bornées).

Comme l'evn  $(\mathbb{F}, |\cdot|)$  est complet,  $X^*$  est un espace de Banach (par le théorème 3.8). La norme sur  $X^*$  est donnée par

$$\|f\|_{X^*} := \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}.$$

Le **bidual** de  $X$ , noté par  $X^{**}$ , est le dual de  $X^* : X^{**} = (X^*)^*$ .

**Remarques :**

- Nous sommes intéressés par le dual **topologique**, c'est-à-dire que  $X^*$  est constitué de fonctionnelles linéaires **continues**.
- On appelle aussi  $X^*$  l'**espace conjugué** de  $X$ .

### 5.2 Espaces congruents.

Deux evn  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$  sont dit **congruents** s'il existe un opérateur linéaire bijectif  $T : X \rightarrow Y$  tel que

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

$T$  est appelé une **congruence**.

### 5.3 Théorème.

Pour  $1 \leq p < \infty$ ,  $(l_{\mathbb{F}}^p)^*$  est congruent à  $l_{\mathbb{F}}^q$ , où  $1/p + 1/q = 1$ .

*Démonstration.* 1<sup>ère</sup> partie : Lors de cette première partie nous allons définir un opérateur linéaire injectif  $T : l^q \rightarrow (l^p)^*$  et prouver l'inégalité  $\|T\alpha\|_{(l^p)^*} \leq \|\alpha\|_q$  pour tout  $\alpha \in l^q$ .

Pour cela, définissons pour  $\alpha \in l^q$  la fonctionnelle  $T\alpha \in (l^p)^*$  donnée par

$$(T\alpha)\xi := \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \xi_k$$

pour tout  $\xi \in l^p$ . Par l'inégalité de Hölder,  $\sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k| |\xi_k| \leq \|\alpha\|_q \|\xi\|_p < \infty$  et  $(T\alpha)\xi$  est donc bien défini. Clairement  $T\alpha : l^p \rightarrow \mathbb{F}$  est une fonctionnelle linéaire et bornée vu que, pour tout  $\xi \in l^p$ , nous avons

$$|(T\alpha)\xi| \leq \|\alpha\|_q \|\xi\|_p,$$

la norme satisfaisant ainsi  $\|T\alpha\|_{(l^p)^*} \leq \|\alpha\|_q$ . Observons que  $T : l^q \rightarrow (l^p)^*$  est linéaire et injectif. Pour vérifier l'injectivité, remarquons que si  $\alpha \neq \tilde{\alpha}$  dans  $l^q$ , alors il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\alpha_k \neq \tilde{\alpha}_k$  et donc  $(T\alpha)e_k \neq (T\tilde{\alpha})e_k$  et ainsi  $T\alpha \neq T\tilde{\alpha}$ , où  $e_k = (\delta_{k,n})_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$ .

2<sup>ème</sup> partie : Nous allons maintenant prouver la surjectivité de  $T$  ainsi que l'inégalité  $\|T\alpha\|_{(l^p)^*} \geq \|\alpha\|_q$  pour tout  $\alpha \in l^q$ .

Considérons pour cela un  $f \in (l^p)^*$  et définissons  $\alpha = (\alpha_k) \subset \mathbb{F}$  par  $\alpha_k = f(e_k)$ . Vérifions que  $\alpha \in l^q$  et  $\|\alpha\|_q \leq \|f\|_{(l^p)^*}$ .

(a)  $p = 1$  : Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|\alpha_k| = |f(e_k)| \leq \|f\|_{(l^1)^*} \|e_k\|_1 = \|f\|_{(l^1)^*}$ . D'où  $\alpha \in l^\infty$  et  $\|\alpha\|_\infty \leq \|f\|_{(l^1)^*}$ .

(b)  $1 < p < \infty$  : Soit  $\xi^{(n)} \subset \mathbb{F}$  défini par

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_k = 0 \text{ ou } k > n \\ \frac{|\alpha_k|^q}{\alpha_k} & \text{si } \alpha_k \neq 0 \text{ et } k \leq n. \end{cases}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k^{(n)} = \sum_{k=1}^n f(e_k) \xi_k^{(n)} = f(\xi^{(n)}) \leq \|f\|_{(l^p)^*} \|\xi^{(n)}\|_p \\ &= \|f\|_{(l^p)^*} \left( \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{(l^p)^*} \left( \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

et donc  $(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q)^{1-1/p} \leq \|f\|_{(l^p)^*}$ . En laissant  $n$  tendre vers l'infini, nous déduisons que  $\alpha \in l^q$  et  $\|\alpha\|_q \leq \|f\|_{(l^p)^*}$ .

Il reste à voir que  $T\alpha = f$ . Comme  $1 \leq p < \infty$ ,

$$\forall \xi \in l^p \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k e_k = \xi$$

dans  $l^p$  (cf série 3, exo 1, où nous avons vu que  $\{e_k\}_{k \geq 1}$  est une base de Schauder de  $l^p$  pour  $1 \leq p < \infty$ ). Nous en déduisons pour tout  $\xi \in l^p$

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k = (T\alpha)\xi, \end{aligned}$$

ce qui achève cette preuve.  $\square$

## 5.4 Remarques.

(a)  $l^1$  et  $(l^\infty)^*$  ne sont pas congruents (cf séries d'exercices).

(b) Pour  $1 \leq p < \infty$  et  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , on montre que  $(L_{\mathbb{F}}^p(a, b))^*$  est congruent à  $L_{\mathbb{F}}^q(a, b)$ , où  $1/p + 1/q = 1$ .

## 5.5 Ensembles partiellement/totalement ordonnés, majorant et élément maximal.

Un **ensemble partiellement ordonné**  $(P, \prec)$  consiste en un ensemble  $P \neq \emptyset$  et en un ordre partiel  $\prec$ , c'est-à-dire une relation telle que

- $x \prec x$  (réflexivité) ;
- $x \prec y$  et  $y \prec x \Rightarrow x = y$  (antisymétrie) ;
- $x \prec y$  et  $y \prec z \Rightarrow x \prec z$  (transitivité).

Un **ensemble totalement ordonné**  $(T, \prec)$  est un ensemble partiellement ordonné avec la propriété additionnelle

$$\forall (x, y) \in T^2 \quad (x \prec y \text{ ou } y \prec x).$$

Un **majorant** d'un sous-ensemble  $W$  d'un ensemble partiellement ordonné  $(P, \prec)$  est un élément  $z \in P$  tel que  $x \prec z$  pour tout  $x \in W$ .

Un **élément maximal** d'un ensemble partiellement ordonné  $P$  est un élément  $m \in P$  tel que  $m \prec x \Rightarrow m = x$ .

## 5.6 Remarques.

(a) Si l'ordre n'est pas total, un élément maximal de  $(P, \prec)$  n'est pas nécessairement un majorant de  $P$ .

(b) Si  $(P, \prec)$  est un ensemble partiellement ordonné et  $\emptyset \neq Q \subset P$ , alors  $Q$  est aussi un ensemble partiellement ordonné.

## 5.7 Lemme de Zorn.

Soit un ensemble partiellement ordonné  $(P, \prec)$  tel que tout sous-ensemble totalement ordonné  $T \subset P$  admet un majorant  $z_T \in P$  (c'est-à-dire  $x \prec z_T$  pour tout  $x \in T$ ). Alors  $P$  a au moins un élément maximal.

*Démonstration.* La preuve s'appuie sur l'axiome du choix. En fait le lemme de Zorn et l'axiome du choix sont équivalents.  $\square$

## 5.8 Fonctionnelle sous-linéaire.

Soit un espace vectoriel  $X$  sur  $\mathbb{F}$ . Une **fonctionnelle sous-linéaire**  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  est, par définition, sous-additive :

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X,$$

et positivement homogène :

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall x \in X, \quad \forall \alpha \in [0, \infty).$$

## 5.9 Exemples.

(a) Dans un evn  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $p(x) = \|x\|$  définit une fonctionnelle sous-linéaire.

(b) Dans  $X = l_{\mathbb{R}}^{\infty}$ , l'application

$$l_{\mathbb{R}}^{\infty} \ni x \mapsto p(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \in \mathbb{R}$$

est une fonctionnelle sous-linéaire.

Notons que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (n - m + 1)^{-1} \sum_{k=m}^n x_k \in [\inf_{k \geq m} x_k, \sup_{k \geq m} x_k]$  et donc  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq p(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

## 5.10 Le théorème d'extension de Hahn-Banach pour des fonctionnelles sous-linéaires.

Soit un espace vectoriel réel  $V$  et une fonctionnelle sous-linéaire  $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Supposons que  $D(f) \subset V$  soit un sous-espace vectoriel et que  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  soit une fonctionnelle linéaire (= application linéaire).

Si  $f(x) \leq p(x)$  pour tout  $x \in D(f)$ , alors il existe une fonctionnelle linéaire  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$F|_{D(f)} = f \text{ et } F(x) \leq p(x) \forall x \in V.$$

*Démonstration.* 1<sup>ère</sup> partie : Nous allons dans cette première partie appliquer le lemme de Zorn. Considérons pour cela l'ensemble

$$P := \{g : D(g) \rightarrow \mathbb{R} \mid D(g) \text{ est un sous-ev de } V, g \text{ est linéaire,} \\ D(f) \subset D(g), g|_{D(f)} = f \text{ et } g(x) \leq p(x) \text{ sur } D(g)\}$$

et définissons l'ordre partiel  $\prec$  sur  $P$  par

$$g \prec h \text{ si } D(g) \subset D(h) \text{ et } h|_{D(g)} = g.$$

Notons que  $P \neq \emptyset$  puisque  $f \in P$ .

Pour tout sous-ensemble totalement ordonné  $T \subset P$ , on définit  $\hat{g} : D(\hat{g}) \rightarrow \mathbb{R}$  par  $D(\hat{g}) = \cup_{g \in T} D(g)$  et  $\hat{g}(x) = g(x)$  si  $x \in D(g)$  et  $g \in T$ . Il est facile de vérifier que  $\hat{g} \in P$  et que  $g \prec \hat{g}$  pour tout  $g \in T$ .

Ainsi  $\hat{g}$  est un majorant de  $T$ , et par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal  $F \in P$ .

2<sup>ème</sup> partie : Prouvons maintenant que  $D(F) = V$ .

Par contradiction, supposons qu'il existe un  $z \in V \setminus D(F)$ . Pour  $c \in \mathbb{R}$ , définissons  $\hat{F} : D(\hat{F}) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$D(\hat{F}) = D(F) \oplus \text{span}\{z\} \text{ et } \hat{F}(x + \lambda z) = F(x) + \lambda c,$$

pour tout  $x \in D(F)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Peut-on choisir  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $\hat{F}(u) \leq p(u)$  sur  $D(\hat{F})$ ? Observons que

$$\begin{aligned} & \hat{F}(u) \leq p(u) \text{ pour tout } u \in D(\hat{F}) \\ \Leftrightarrow & F(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda z) \text{ pour tout } x \in D(F) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \Leftrightarrow_{x=\lambda|y} & F(y) + \frac{\lambda}{|\lambda|}c \leq p\left(y + \frac{\lambda}{|\lambda|}z\right) \text{ pour tout } y \in D(F) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \Leftrightarrow & F(y) + c \leq p(y + z) \text{ et } F(y) - c \leq p(y - z) \text{ pour tout } y \in D(F) \\ \Leftrightarrow & \sup_{y \in D(F)} \{F(y) - p(y - z)\} \leq c \leq \inf_{y \in D(F)} \{p(y + z) - F(y)\}. \end{aligned}$$

Une telle valeur de  $c \in \mathbb{R}$  existe si  $F(y_1) - p(y_1 - z) \leq p(y_2 + z) - F(y_2)$  pour tout  $y_1, y_2 \in D(F)$ . Mais ceci est vrai car

$$\begin{aligned} F(y_1) + F(y_2) &= F(y_1 + y_2) \leq_{y_1+y_2 \in D(F)} p(y_1 + y_2) \\ &= p((y_1 - z) + (y_2 + z)) \leq_{\text{sous-additivité}} p(y_1 - z) + p(y_2 + z) \end{aligned}$$

pour tout  $y_1, y_2 \in D(F)$ .

Ceci montre que, pour un tel choix de  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{F} \in P$ ,  $F \prec \hat{F}$  et  $F \neq \hat{F}$ , contredisant la maximalité de  $F$ .  $\square$

## 5.11 Théorème : existence d'une limite de Banach.

Rappelons qu'une **limite de Banach**  $F : l_{\mathbb{R}}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application linéaire telle que :

- $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq F(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  pour tout  $x \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$  ;
- $F(x) = F(Sx)$  pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$ , où  $Sx = (x_2, x_3, \dots)$ .

**Théorème :** Un tel  $F$  existe.

*Démonstration.* Soient  $V = l_{\mathbb{R}}^{\infty}$ ,  $D(f) = \{x \in l_{\mathbb{R}}^{\infty} : x \text{ converge}\}$ ,  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  pour tout  $x \in D(f)$ , et

$$p(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

pour tout  $x \in V$  (c'est l'exemple 5.9(b)). Remarquons que, pour  $x \in D(f)$ ,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = p(x).$$

Soit  $F : l_{\mathbb{R}}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$  donné par le théorème 5.10. Alors  $F$  est linéaire et

$$F(x) \leq p(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

pour tout  $x \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$ . De plus

$$F(x) = -F(-x) \geq -\limsup_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

pour tout  $x \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$ . Il reste à vérifier que  $F(x) = F(Sx)$  pour tout  $x \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$ . On a

$$\begin{aligned} F(x - Sx) &\leq p(x - Sx) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1}) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 - x_{n+1}}{n} = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F(x - Sx) &= -F(Sx - x) \geq -p(Sx - x) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) \\ &= -\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_1}{n} = 0. \end{aligned}$$

D'où  $F(x - Sx) = 0$  et  $F(x) = F(Sx)$  pour tout  $x \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$ . □

## 5.12 Le théorème d'extension de Hahn-Banach pour des fonctionnelles linéaires bornées.

Soit un evn  $(X, \|\cdot\|)$  sur  $\mathbb{F}$ , un sous-espace vectoriel  $D(f) \subset X$  et une fonctionnelle linéaire  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{F}$  que l'on suppose bornée :

$$\|f\|_{D(f)^*} := \sup\{|f(x)| : x \in D(f) \text{ et } \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

Alors il existe  $F \in X^*$  tel que  $F|_{D(f)} = f$  et  $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{D(f)^*}$ .

*Démonstration.* Nous écrirons  $\|f\|$  et  $\|F\|$  à la place de  $\|f\|_{D(f)^*}$  et  $\|F\|_{X^*}$ .

(i)  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  : Définissons  $p(x) := \|f\| \|x\|$  pour tout  $x \in X$ . Alors  $p$  est une fonctionnelle sous-linéaire sur  $X$  telle que

$$f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\| \|x\| = p(x), \quad \forall x \in D(f).$$

En appliquant le théorème 5.10 à  $f$ ,  $V = X$  et  $p$ , on obtient une extension linéaire  $F$  de  $f$  définie sur  $X$  et telle que

$$F(x) \leq p(x) = \|f\| \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Comme  $F(x) = -F(-x) \geq -p(-x) = -\|f\| \|-x\| = -\|f\| \|x\|$ , nous avons aussi  $|F(x)| \leq \|f\| \|x\|$  pour tout  $x \in X$ . D'où  $F \in X^*$  et  $\|F\| \leq \|f\|$ . D'autre part

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{|F(x)| : x \in D(f) \text{ et } \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|F(x)| : x \in X \text{ et } \|x\| \leq 1\} = \|F\|. \end{aligned}$$

(ii)  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  : Pour  $x \in D(f)$ , écrivons

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) \text{ avec } f_1(x) = \operatorname{Re}(f(x)) \text{ et } f_2(x) = \operatorname{Im}(f(x)).$$

Remarquons que  $f_1 : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire et  $f_1(x) \leq |f(x)| \leq \|f\| \|x\|$  pour tout  $x \in D(f)$ . En appliquant le théorème 5.10 à  $f_1$ ,  $V = X$  vu comme espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $p(x) := \|f\| \|x\|$ , on obtient une extension  $\mathbb{R}$ -linéaire  $F_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f_1$  telle que  $F_1(x) \leq p(x) = \|f\| \|x\|$  pour tout  $x \in X$ .

Pour  $x \in D(f)$ , nous avons

$$f_2(x) = \operatorname{Im}(f(x)) = \operatorname{Re}(-if(x)) = -\operatorname{Re}(f(ix)) = -f_1(ix).$$

Ceci conduit à la définition suivante :

$$F(x) := F_1(x) - iF_1(ix) \quad \forall x \in X.$$

Clairement  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  est une extension  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $f$ . La  $\mathbb{C}$ -linéarité de  $F$  est une conséquence de

$$F(ix) = F_1(ix) - iF_1(-x) = i(F_1(x) - iF_1(ix)) = iF(x)$$

pour tout  $x \in X$ . Finalement, pour tout  $x \in X$  tel que  $F(x) \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} |F(x)| &= |F(x)| F\left(\frac{x}{F(x)}\right) = |F(x)| F_1\left(\frac{x}{F(x)}\right) \\ &\leq |F(x)| \|f\| \left\| \frac{x}{F(x)} \right\| = \|f\| \|x\|, \end{aligned}$$

et donc  $F \in X^*$  avec  $\|F\| \leq \|f\|$ . D'autre part

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{|F(x)| : x \in D(f) \text{ et } \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|F(x)| : x \in X \text{ et } \|x\| \leq 1\} = \|F\| \end{aligned}$$

et ainsi  $\|f\| = \|F\|$ . □

### 5.13 Théorème.

Soient un evn  $(X, \|\cdot\|)$  sur  $\mathbb{F}$ , un sous-espace vectoriel fermé  $L \subset X$  et  $x_0 \in X \setminus L$ . Alors il existe  $F \in X^*$  tel que  $F(x_0) = 1$  et  $F|_L = 0$ .

*Démonstration.* Définissons  $M = L \oplus \text{span}\{x_0\}$  et  $f : M \rightarrow \mathbb{F}$  par  $f(u + \lambda x_0) := \lambda$  pour tout  $u \in L$  et  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Clairement  $f$  est linéaire. Prouvons que  $f$  est bornée. Par contradiction, supposons qu'il existe une suite  $\{u_n + \lambda_n x_0\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_n \in L$ ,  $\|u_n + \lambda_n x_0\| \leq 1$  et  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ . Alors

$$\|\lambda_n^{-1} u_n + x_0\| = |\lambda_n|^{-1} \|u_n + \lambda_n x_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\lambda_n^{-1} u_n) = x_0$ . Comme  $L$  est fermé, on obtient la contradiction que  $x_0 \in L$ . Ainsi  $f$  est bornée. Par le théorème 5.12,  $f$  admet une extension  $F \in X^*$ . Clairement  $F(x_0) = f(x_0) = 1$  et  $F|_L = f|_L = 0$ . □

### 5.14 Proposition.

Soient un evn  $(X, \|\cdot\|)$  sur  $\mathbb{F}$  et  $x_0 \in X \setminus \{0\}$ . Alors il existe  $F \in X^*$  tel que  $F(x_0) = \|x_0\|$  et  $\|F\| = 1$ .

*Démonstration.* Définissons  $f : \text{span}\{x_0\} \rightarrow \mathbb{F}$  par  $f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$ . Comme

$$\forall \lambda \in \mathbb{F} \quad |f(\lambda x_0)| = |\lambda| \|x_0\| = \|\lambda x_0\|,$$

nous avons

$$\sup\{|f(x)| : x \in \text{span}\{x_0\} \text{ et } \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|x\| : x \in \text{span}\{x_0\} \text{ et } \|x\| \leq 1\} = 1.$$

Par le théorème 5.12,  $f$  admet une extension  $F \in X^*$  telle que  $\|F\| = 1$ . Clairement  $F(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$ . □

### 5.15 Proposition.

Soit un evn  $(X, \|\cdot\|)$ . Pour tout  $x_0 \in X$ , nous avons

$$\|x_0\| = \max_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x_0)|.$$

*Démonstration.* Si  $x_0 = 0$ , c'est évident. Si  $x_0 \neq 0$ , nous avons

$$|f(x_0)| \leq \|f\| \|x_0\| \leq \|x_0\|$$

pour tout  $f \in X^*$  telle que  $\|f\| \leq 1$ , et donc  $\|x_0\| \geq \sup_{f \in X^*, \|f\| \leq 1} |f(x_0)|$ . Soit  $F$  donné par la proposition 5.14. Alors  $\|F\| = 1$  et  $F(x_0) = \|x_0\|$ , d'où  $\|x_0\| = \max_{f \in X^*, \|f\| \leq 1} |f(x_0)|$ .  $\square$

### 5.16 L'injection canonique.

Soit un evn  $(X, \|\cdot\|)$ . L'application  $J : X \rightarrow X^{**}$  donnée par

$$(Jx)(f) := f(x)$$

pour tout  $x \in X$  et  $f \in X^*$  est l'**injection canonique** de  $X$  dans  $X^{**}$ .

**Remarques.** Il est facile de vérifier que, pour tout  $x \in X$ ,  $Jx : X^* \rightarrow \mathbb{F}$  est effectivement linéaire. De plus, pour tout  $x \in X$ ,  $Jx : X^* \rightarrow \mathbb{F}$  est bornée car

$$|(Jx)(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \quad \forall f \in X^*.$$

Le fait que  $J$  est injective résulte du fait que  $J$  est isométrique, comme l'affirme le théorème qui suit.

### 5.17 Théorème.

L'injection canonique  $J$  est linéaire et isométrique. Ainsi  $X$  et  $J(X)$  sont congruents.

*Démonstration.* Pour tout  $x, y \in X$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  et  $f \in X^*$ , nous avons

$$\begin{aligned} (J(\alpha x + \beta y))(f) &= f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha (Jx)(f) + \beta (Jy)(f), \end{aligned}$$

et donc  $J(\alpha x + \beta y) = \alpha Jx + \beta Jy$ . De plus

$$\begin{aligned} \|Jx\| &= \sup\{|(Jx)(f)| : f \in X^*, \|f\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| \leq 1\} \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

par la proposition 5.15.  $\square$

## 5.18 Espaces vectoriels normés réflexifs.

Un evn  $X$  est dit **réflexif** si l'injection canonique  $J : X \rightarrow X^{**}$  est surjective.

**Remarque :** Dans ce cas  $X$  est nécessairement complet puisque  $X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{F})$  l'est.

## 5.19 Exemples.

- 1) Pour  $1 < p < \infty$  et  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $l^p$  et  $L^p(a, b)$  sont réflexifs;
- 2) Tout espace hilbertien est réflexif;
- 3)  $l^1$  n'est pas réflexif.

Cf série 11.

## 5.20 Convergence faible et convergence forte.

Dans un evn  $X$ , on dit que la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  **converge faiblement** vers  $x$  si  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  pour tout  $f \in X^*$ . On dit alors que  $x$  est la **limite faible** de  $\{x_n\}$ .

**Notations :**  $x_n \xrightarrow{wk} x$  ou  $x_n \rightharpoonup x$  (*wk* signifie “weak”).

Par contraste, la convergence (ie  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ ) est parfois appelée **convergence forte** ou **en norme**.

## 5.21 Proposition.

- 1) Si  $x_n \rightarrow x$ , alors  $x_n \xrightarrow{wk} x$ ;
- 2) Si  $x_n \xrightarrow{wk} x$  et  $x_n \xrightarrow{wk} y$ , alors  $x = y$ ;
- 3) Dans un espace hilbertien  $H$ ,  $x_n \xrightarrow{wk} x$  ssi  $\langle x_n, z \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle$  pour tout  $z \in H$ ;
- 4) Dans  $l^2$ , les vecteurs  $e_n := (\delta_{n,j})_{j \in \mathbb{N}}$  satisfont  $e_n \xrightarrow{wk} 0$ , mais  $e_n \not\rightarrow 0$ .

**Remarque :** Dans  $\mathbb{F}^k$  muni de n'importe quelle norme, la convergence faible implique la convergence de chaque composante, et donc la convergence en norme.

*Démonstration.* 1) Si  $x_n \rightarrow x$ , alors  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  pour tout  $f \in X^*$  par continuité de  $f$  ;

2) Par l'absurde, supposons que  $x \neq y$ . Par la proposition 5.14, il existe un  $F \in X^*$  tel que  $F(x - y) = \|x - y\|$  et  $\|F\| = 1$ . Comme  $x_n \xrightarrow{wk} x$  et  $x_n \xrightarrow{wk} y$ ,

$$\|x - y\| = F(x - y) = F(x) - F(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0,$$

et donc  $x = y$ , ce qui est une contradiction.

3) Résulte du théorème de représentation de Riesz (série 10) ;

4) Pour tout  $\xi = (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^2$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle e_n, \xi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\xi_n} = 0,$$

(si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , on peut omettre le conjugué complexe) et donc  $e_n \xrightarrow{wk} 0$ . Comme  $\|e_n\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e_n \not\rightarrow 0$ .  $\square$

## 5.22 Convergence faible\*.

Dans un evn  $X$ , on dit que la suite  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$  **converge faiblement\*** vers  $f \in X^*$  si  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pour tout  $x \in X$ . On dit alors que  $f$  est la **limite faible\***, et on note  $f_n \xrightarrow{wk*} f$  ou  $f_n \xrightarrow{*} f$ .

**Remarques :**

- $f_n \xrightarrow{wk} f$  signifie que  $\phi(f_n) \rightarrow \phi(f)$  pour tout  $\phi \in X^{**}$  (appliquer la définition 5.20 à l'evn  $X^*$ ).
- Si  $X$  est réflexif, alors  $f_n \xrightarrow{wk} f$  ssi  $f_n \xrightarrow{wk*} f$ . En effet, soit l'injection canonique  $J : X \rightarrow X^{**}$ . Alors

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{wk} f &\Leftrightarrow \forall x \in X, (Jx)(f_n) \rightarrow (Jx)(f) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X, f_n(x) \rightarrow f(x) \\ &\Leftrightarrow f_n \xrightarrow{wk*} f. \end{aligned}$$

- En général,  $f_n \xrightarrow{wk} f$  implique  $f_n \xrightarrow{wk*} f$ .

## 5.23 Théorème.

Soient un evn  $X$  et  $\{f_n\} \subset X^*$ . Si  $X$  est séparable et  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$ , alors  $\{f_n\}$  admet une sous-suite convergeant faiblement\*.

*Démonstration.* Soit un sous-ensemble dense dénombrable  $D = \{x_p : p \in \mathbb{N}\} \subset X$ . La suite  $\{f_n(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $\mathbb{F}$  car

$$|f_n(x_1)| \leq \|f_n\| \|x_1\| \leq \|x_1\| \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|.$$

Il existe donc une sous-suite  $\{f_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\{f_{1,n}(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{F}$ . De même, il existe une sous-suite  $\{f_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{f_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\{f_{2,n}(x_2)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{F}$ .

En répétant ce procédé, on obtient des sous-suites  $\{f_{p,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telles que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

- 1)  $\{f_{p,n}(x_p)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{F}$ ;
- 2)  $\{f_{p+1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une sous-suite de  $\{f_{p,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

La sous-suite diagonale  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \{f_{n,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  est telle que, pour chaque  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\{g_n\}_{n \geq p}$  est une sous-suite de  $\{f_{p,n}\}_{n \geq p}$  et donc  $\{g_n(x_p)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{F}$ . Pour  $x \in X$  fixé,  $\{g_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. En effet, soit  $\epsilon > 0$ . Alors il existe  $z \in D$  tel que

$$\|z - x\| < \frac{\epsilon/3}{1 + \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|}$$

et  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$|g_m(z) - g_n(z)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall m, n \geq N$$

(puisque  $\{g_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge). D'où

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &\leq |g_m(x) - g_m(z)| + |g_m(z) - g_n(z)| + |g_n(z) - g_n(x)| \\ &< \|g_m\| \|z - x\| + \frac{\epsilon}{3} + \|g_n\| \|z - x\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

pour tout  $m, n \geq N$ . Ainsi, pour tout  $x \in X$ ,  $\{g_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Notons la limite  $g(x) \in \mathbb{F}$ . Clairement  $g : X \rightarrow \mathbb{F}$  est linéaire et

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\| \leq 1} |g(x)| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \right| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{n \in \mathbb{N}} |g_n(x)| \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\| < \infty. \end{aligned}$$

D'où  $g \in X^*$  et  $g_n \xrightarrow{wk^*} g$ . □

## 5.24 Théorème.

Soit un espace de Banach  $(B, \|\cdot\|)$  et une suite  $\{x_n\} \subset B$ . Si  $B$  est réflexif et  $\{x_n\}$  est bornée, alors  $\{x_n\}$  admet une sous-suite convergeant faiblement dans  $B$ .

*Démonstration.* Soit  $X = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$  muni de la même norme  $\|\cdot\|$ . Nous noterons par  $J : X \rightarrow X^{**}$  l'injection canonique.

1<sup>ère</sup> partie : vérification que  $(X, \|\cdot\|)$  est réflexif.

Observons d'abord que, si  $f \in B^*$ , alors la fonctionnelle linéaire  $f|_X$  est bornée :

$$\|f|_X\| = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in B, \|x\| \leq 1\} = \|f\|.$$

De plus cette inégalité prouve que l'application linéaire  $f \rightarrow f|_X$  de  $B^*$  dans  $X^*$  est bornée.

Il s'agit de montrer que  $J$  est surjectif. Soit  $\phi \in X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{F})$ . Par ce qui précède, l'application linéaire  $f \rightarrow \phi(f|_X)$  de  $B^*$  dans  $\mathbb{F}$  est bornée, en tant que composée d'applications linéaires bornées. Comme  $B$  est supposé réflexif, il existe  $x \in B$  tel que

$$\forall f \in B^* \quad \phi(f|_X) = f(x). \quad (\star)$$

Prouvons par l'absurde que  $x \in X$  : si ce n'était pas le cas, le §5.13 assurerait l'existence de  $F \in B^*$  tel que  $F(x) = 1$  et  $F|_X = 0$  (car  $X$  est fermé dans  $B$ ), ce qui conduirait à l'absurdité  $1 = F(x) \stackrel{(\star)}{=} \phi(F|_X) = 0$ . Soit maintenant  $g \in X^*$ . Alors le §5.12 assure que  $g$  admet une extension  $G \in B^*$ . D'où  $\phi(g) = \phi(G|_X) \stackrel{(\star)}{=} G(x) = G|_X(x) = g(x) = (Jx)(g)$ . Ceci étant valable pour tout  $g \in X^*$ , on a prouvé que  $\phi = Jx$ . Ainsi  $J$  est surjectif et  $X$  est réflexif.

2<sup>ème</sup> partie : séparabilité.

$X$  est séparable. En effet, si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ), les combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  (resp.  $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ ) de tout nombre fini d'éléments de la suite  $\{x_n\}$  constituent un ensemble dénombrable et dense dans  $X$ .

Comme  $J : X \rightarrow X^{**}$  est une congruence,  $X^{**}$  est aussi séparable. L'exercice 4 de la série 11 assure alors que  $X^*$  est séparable.

3<sup>ème</sup> partie : conclusion.

Comme  $J$  est isométrique,  $\{Jx_n\}$  est bornée dans  $X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{F})$ . D'après le §5.23 appliqué à l'evn séparable  $X^*$ , il existe une sous-suite  $\{x_{n_k}\}$  telle que  $Jx_{n_k} \xrightarrow{wk*} \phi$  pour un certain  $\phi \in X^{**}$ . Par la première partie, il existe  $x \in X$  tel que  $\phi = Jx$ . Comme vu dans la première partie, si  $f \in B^*$ , alors  $f|_X \in X^*$  et donc

$$f(x_{n_k}) = f|_X(x_{n_k}) = (Jx_{n_k})(f|_X) \rightarrow \phi(f|_X) = (Jx)(f|_X) = f|_X(x) = f(x).$$

Ceci étant valable pour tout  $f \in B^*$ , on a montré que  $x_{n_k} \xrightarrow{wk} x$  dans  $B$ .  $\square$

## Chapitre 6

# Conséquences du théorème de Baire

### 6.1 Théorème de Baire.

Soit un espace métrique complet  $(M, d)$  et une suite  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'ouverts denses dans  $M$  :  $\overline{U_n} = M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (cf série 2). Alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  est un ensemble dense dans  $M$ .

**Remarque :**  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  peut ne pas être ouvert.

*Démonstration.* Voir le cours "Espaces métriques et topologiques".  $\square$

### 6.2 Ensembles maigres.

Soit un espace métrique  $(M, d)$ . Un sous-ensemble  $A \subset M$  est dit **maigre** ou de **première catégorie** si  $M \setminus A$  contient l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses. Ceci équivaut à dire que  $A$  est contenu dans l'union d'une famille dénombrable de fermés dont aucun ne contient de boules. Si  $A$  **n'est pas maigre**, on dit aussi qu'il est de **seconde catégorie**. Si  $(M, d)$  est complet, le théorème de Baire implique que  $M$  n'est pas maigre.

### 6.3 Théorème de la borne uniforme de Banach-Steinhaus.

Soient des evn  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$ ,  $Z \subset X$  et  $\Gamma \subset \mathcal{L}(X, Y)$ . Si  $Z$  n'est pas maigre et si, pour tout  $z \in Z$ ,  $\sup\{\|Tz\| : T \in \Gamma\} < \infty$ , alors  $\sup\{\|T\| : T \in \Gamma\} < \infty$ .

*Démonstration.* Pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble

$$D_n := \{x \in X : \sup_{T \in \Gamma} \|Tx\| \leq n\} = \bigcap_{T \in \Gamma} \{x \in X : \|Tx\| \leq n\}$$

est fermé. De plus  $Z \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ . Comme  $Z$  n'est pas maigre, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $D_n$  contient  $B(\hat{x}, \epsilon)$  pour certains  $\hat{x} \in X$  et  $\epsilon > 0$ . D'où

$$\|x - \hat{x}\| \leq \epsilon/2 \Rightarrow \sup\{\|Tx\| : T \in \Gamma\} \leq n,$$

et donc

$$\begin{aligned} & \sup\{\|Tu\| : T \in \Gamma, \|u\| \leq 1\} \\ = & \sup\left\{\left\|T\left(\frac{x - \hat{x}}{\epsilon/2}\right)\right\| : T \in \Gamma, \|x - \hat{x}\| \leq \epsilon/2\right\} \\ \leq & \frac{2}{\epsilon} \sup\{\|Tx\| + \|T\hat{x}\| : T \in \Gamma, \|x - \hat{x}\| \leq \epsilon/2\} \\ \leq & \frac{2}{\epsilon} (\sup\{\|T\hat{x}\| : T \in \Gamma\} + \sup\{\|Tx\| : T \in \Gamma, \|x - \hat{x}\| \leq \epsilon/2\}) \\ \leq & \frac{4n}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\sup_{T \in \Gamma} \|T\| \leq 4n/\epsilon < \infty$ . □

## 6.4 Remarque.

Si  $X$  est complet, on peut choisir  $Z = X$  dans le théorème 6.3 (cf §2).

## 6.5 Convergence ponctuelle, convergence forte et limite forte.

Soient des evn  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$ , et  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ . Si  $\{T_n x\} \subset Y$  converge pour tout  $x \in A \subset X$ , on dit que la suite  $\{T_n\}$  **converge ponctuellement** sur  $A$ . Si la suite  $\{T_n\}$  converge ponctuellement sur  $X$ , on dit qu'elle **converge fortement**. Dans ce cas, on peut définir  $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$  pour tout  $x \in X$ . Alors  $T : X \rightarrow Y$  est un opérateur linéaire, mais pas forcément borné. Il s'appelle la **limite forte** de  $\{T_n\}$ . Si  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$  pour un certain  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , on dit que  $\{T_n\}$  converge (uniformément) vers  $T$ .

**Remarque :** La terminologie “convergence forte” a déjà été utilisée, mais dans un sens différent, au paragraphe 5.20.

## 6.6 Exemple.

Soient  $X = l^1$ ,  $Y = \mathbb{F}$  (c'est-à-dire que  $\mathcal{L}(X, Y) = (l^1)^*$ ), et

$$T_n \xi := \xi_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \xi \in l^1.$$

Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n \xi = 0$  pour tout  $\xi \in l^1$  et  $\|T_n\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement, mais pas uniformément, vers  $0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

## 6.7 Théorème.

Soient des espaces de Banach  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$ , et  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\{T_n\}$  converge fortement ;
- (2)  $\{T_n\}$  converge fortement vers un certain  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  et  $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$  ;
- (3)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$  et il existe un sous-ensemble dense  $D \subset X$  tel que  $\{T_n\}$  converge ponctuellement sur  $D$ .

*Démonstration.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : Le principe de la borne uniforme nous assure que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ . Posons  $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$  pour tout  $x \in X$ , ce qui définit une application  $T : X \rightarrow Y$  qui est clairement linéaire. De plus, pour tout  $x \in X$  tel que  $\|x\| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|T_n\| \|x\|) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|. \end{aligned}$$

Ainsi  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  et  $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Par le principe de la borne uniforme,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$  et on peut choisir  $D = X$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Soient  $x \in X$  et  $\epsilon > 0$ . Pour  $m, n \in \mathbb{N}$  et  $z \in D$ , on a

$$\begin{aligned} \|T_m x - T_n x\| &\leq \|T_m x - T_m z\| + \|T_m z - T_n z\| + \|T_n z - T_n x\| \\ &\leq \|T_m\| \|x - z\| + \|T_m z - T_n z\| + \|T_n\| \|z - x\|. \end{aligned}$$

Choisissons  $z \in D$  tel que

$$\|z - x\| < \frac{\epsilon/3}{1 + \sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k\|},$$

et  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\|T_m z - T_n z\| < \epsilon/3$  pour tout  $m, n \geq N$  (possible car  $\{T_n z\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge et est donc de Cauchy). D'où

$$\|T_m x - T_n x\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

pour tout  $m, n \geq N$ . Ceci montre que  $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy et donc converge dans l'espace de Banach  $Y$ .  $\square$

## 6.8 Rappel.

Soit un evn  $X$  sur  $\mathbb{F}$ . On dit que la suite  $\{\varphi_n\} \subset X^*$  converge faiblement\* vers  $\varphi \in X^*$  si  $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  pour tout  $x \in X$ .

On note alors  $\varphi_n \xrightarrow{wk*} \varphi$  ou  $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$ .

## 6.9 Théorème.

Pour un espace de Banach  $X$  et une suite  $\{\varphi_n\} \subset X^*$ , les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\{\varphi_n(x)\}$  converge dans  $\mathbb{F}$  pour tout  $x \in X$  ;
- (2) Il existe  $\varphi \in X^*$  telle que  $\varphi_n \xrightarrow{wk*} \varphi$  et  $\|\varphi\|_{X^*} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_{X^*}$  ;
- (3)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X^*} < \infty$  et il existe un sous-ensemble dense  $D \subset X$  tel que  $\{\varphi_n(x)\}$  converge pour tout  $x \in D$ .

*Démonstration.* Découle du théorème 6.7. □

## 6.10 Exemple : intégration numérique.

Soient  $-\infty < a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = b < \infty$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $u \in C([a, b], \mathbb{R})$  et  $n \in \mathbb{N}$ , considérons l'algorithme d'intégration numérique suivant :

$$\int_a^b u(t)dt = \varphi_n(u) + r_n(u),$$

où  $\varphi_n(u) = \sum_{k=0}^n c_k^{(n)} u(t_k^{(n)})$ . Les  $c_k^{(n)} \in \mathbb{R}$  sont des coefficients indépendants de  $u$ , et  $r_n(u)$  est le reste. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(u) = 0 \quad \forall u \in C([a, b], \mathbb{R})$  ;
- (b)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n |c_k^{(n)}| < \infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(p) = 0$  pour tout polynôme  $p \in C([a, b], \mathbb{R})$ .

*Démonstration.* Posons  $X = C([a, b], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  et vérifions que  $\varphi_n \in X^*$  avec  $\|\varphi_n\| = \sum_{k=0}^n |c_k^{(n)}|$ .

Pour tout  $u \in X$ ,  $|\varphi_n(u)| \leq \sum_{k=0}^n |c_k^{(n)}| \|u\|_\infty$  et donc  $\varphi_n \in X^*$  avec  $\|\varphi_n\| \leq \sum_{k=0}^n |c_k^{(n)}|$ .

En choisissant pour  $u$  la fonction continue  $w_n : [a, b] \rightarrow [-1, 1]$  affine sur

chaque intervalle  $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ) et telle que  $w_n(t_k^{(n)}) = \text{sgn}(c_k^{(n)}) \in \{-1, 0, 1\}$  (pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ), on obtient

$$\sum_{k=0}^n |c_k^{(n)}| = \varphi_n(w_n) \leq \|\varphi_n\| \|w_n\|_\infty \leq \|\varphi_n\|,$$

et donc  $\|\varphi_n\| = \sum_{k=0}^n |c_k^{(n)}|$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b) : Découle du principe de la borne uniforme (§6.3 avec  $Y = \mathbb{R}$ ) ;

(b)  $\Rightarrow$  (a) : Comme le point (3) du paragraphe 6.9 est vrai (grâce au théorème d'approximation de Weierstrass), le point (2) de ce même paragraphe affirme qu'il existe un  $\varphi \in X^*$  tel que  $\varphi_n \xrightarrow{wk*} \varphi$ . Pour tout polynôme  $p \in C([a, b], \mathbb{R})$ , on obtient

$$\varphi(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(p) = \int_a^b p(t) dt - \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(p) \stackrel{(b)}{=} \int_a^b p(t) dt.$$

D'autre part, la fonctionnelle linéaire  $u \rightarrow \int_a^b u(t) dt$ , définie pour tout  $u \in X$ , est bornée et donc continue. Par densité,  $\varphi(u) = \int_a^b u(t) dt$  et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(u) = 0$  pour tout  $u \in X$ .  $\square$

## 6.11 Le théorème de l'application ouverte.

Soient des espaces de Banach  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$ , et soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  surjectif. Alors l'image par  $T$  de tout ouvert  $U$  dans  $X$  est un ouvert dans  $Y$ .

La preuve s'appuie sur le résultat suivant.

## 6.12 Théorème préliminaire.

Soient  $X$ ,  $Y$  et  $T$  comme ci-dessus. Alors il existe  $c > 0$  tel que  $B_Y(0, c) \subset T(B_X(0, 1))$ .

*Démonstration.* **Première partie** : preuve qu'il existe  $c > 0$  tel que  $B_Y(0, 2c) \subset \overline{T(B_X(0, 1))}$ .

Par la surjectivité de  $T$ ,  $Y = \cup_{n \in \mathbb{N}} T(B_X(0, n))$  et donc  $Y = \cup_{n \in \mathbb{N}} \overline{T(B_X(0, n))}$ . Comme  $Y$  est complet, il n'est pas maigre (théorème de Baire, cf § 6.2) et il existe donc  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\overline{T(B_X(0, n))}$  contient une certaine boule  $B_Y(y, 4cn)$  avec  $y \in Y$  et  $c > 0$ . D'où

$$\begin{aligned} B_Y(0, 4cn) &= \{z - y : z \in B_Y(y, 4cn)\} \\ &\subset \{z_1 - z_2 : z_1, z_2 \in B_Y(y, 4cn)\} \\ &\subset \{z_1 - z_2 : z_1, z_2 \in \overline{T(B_X(0, n))}\} \\ &\subset \overline{\{z_1 - z_2 : z_1, z_2 \in T(B_X(0, n))\}} \subset \overline{T(B_X(0, 2n))}, \end{aligned}$$

et  $B_Y(0, 2c) \subset \overline{T(B_X(0, 1))}$ , par homogénéité de la norme.

**Seconde partie :** preuve que  $B_Y(0, c) \subset T(B_X(0, 1))$ .

Par homogénéité de la norme, pour tout  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $B_Y(0, 2^{-n}c) \subset \overline{T(B_X(0, 2^{-n-1}))}$  et donc

$$\forall y \in B_Y(0, 2^{-n}c), \exists x \in B_X(0, 2^{-n-1}) \text{ tel que } \|y - Tx\| < 2^{-n-1}c. \quad (P_n)$$

Choisissons  $y_0 \in B_Y(0, c)$  quelconque et trouvons  $\hat{x} \in B_X(0, 1)$  tel que  $T\hat{x} = y_0$ . En appliquant  $(P_0)$ , on obtient qu'il existe un  $x_0 \in B_X(0, 1/2)$  tel que  $\|y_0 - Tx_0\| < c/2$ . Posons  $y_1 = y_0 - Tx_0$ . En appliquant  $(P_1)$ , il existe un  $x_1 \in B_X(0, 1/4)$  tel que  $\|y_1 - Tx_1\| < c/4$ . Posons  $y_2 = y_1 - Tx_1$ . En continuant de cette manière, nous obtenons deux suites  $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset X$  et  $\{y_n\}_{n \geq 0} \subset Y$  telles que

$$y_{n+1} = y_n - Tx_n, \quad \|x_n\| < 2^{-n-1} \text{ et } \|y_n\| < 2^{-n}c \quad (\forall n \geq 0).$$

Vérifions que  $\{\sum_{k=0}^n x_k\}_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy. Pour  $\epsilon > 0$ , soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $2^{-N-1} < \epsilon$ . Pour tout  $m > n \geq N$ , on a bien

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^m x_k - \sum_{k=0}^n x_k \right\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| \\ &< \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k-1} = 2^{-n-2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \\ &= 2^{-n-1} \leq 2^{-N-1} < \epsilon. \end{aligned}$$

Comme  $X$  est complet,  $\{\sum_{k=0}^n x_k\}_{n \geq 0}$  converge vers un certain  $\hat{x}$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} T\hat{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} T \sum_{k=0}^n x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (y_k - y_{k+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (y_0 - y_{n+1}) = y_0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n x_k \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \|x_k\| \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} = 1. \end{aligned}$$

□

## Suite du § 6.11 : preuve du théorème de l'application ouverte.

*Démonstration.* Soit un ouvert  $U \subset X$ . Choisissons  $y_0 \in T(U)$  quelconque et  $x_0 \in U$  tel que  $Tx_0 = y_0$ . Comme  $U$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B_X(x_0, r) \subset U$ . Par le théorème 6.12, il existe un  $c > 0$  tel que  $B_Y(0, cr) \subset T(B_X(0, r))$  et donc

$$\begin{aligned} B_Y(y_0, rc) &= \{y_0 + y : y \in B_Y(0, rc)\} \subset \{Tx_0 + Tx : x \in B_X(0, r)\} \\ &= T(B_X(x_0, r)) \subset T(U). \end{aligned}$$

Ceci montre que  $T(U)$  est ouvert.  $\square$

**Remarque :** Si  $(X, \mathcal{T})$  et  $(X', \mathcal{T}')$  sont des espaces topologiques,  $f : X \rightarrow X'$  est dit **ouverte** si  $f(U) \in \mathcal{T}'$  pour tout  $U \in \mathcal{T}$ .

## 6.13 Théorème de l'inverse borné.

Soient des espaces de Banach  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$ , et soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  bijectif. Alors  $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ .

*Démonstration.* Clairement,  $S := T^{-1} : Y \rightarrow X$  est linéaire. Il est continu car, pour tout ouvert  $U$  dans  $X$ ,

$$S^{-1}(U) = T(U)$$

est ouvert dans  $Y$  d'après le théorème 6.11.  $\square$

## 6.14 Corollaire.

Soient des normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sur un espace vectoriel  $X \neq \{0\}$ , telles que  $(X, \|\cdot\|_1)$  et  $(X, \|\cdot\|_2)$  sont des espaces de Banach.

S'il existe  $C > 0$  tel que

$$\forall x \in X \quad \|x\|_2 \leq C\|x\|_1,$$

alors il existe  $D > 0$  tel que

$$\forall x \in X \quad \|x\|_1 \leq D\|x\|_2.$$

Ainsi les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalentes.

*Démonstration.* Définissons  $T$  de  $(X, \|\cdot\|_1)$  dans  $(X, \|\cdot\|_2)$  par  $Tx = x$  pour tout  $x \in X$ . Clairement  $T$  est une bijection. De plus

$$\|Tx\|_2 = \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \text{ pour tout } x \in X,$$

ce qui montre que  $T$  est borné. Par le Théorème de l'Inverse Borné,  $T^{-1}$  est borné de  $(X, \|\cdot\|_2)$  dans  $(X, \|\cdot\|_1)$ . Pour tout  $x \in X$ , on obtient

$$\|x\|_1 = \|T^{-1}x\|_1 \leq \|T^{-1}\| \|x\|_2$$

et on peut donc choisir  $D = \|T^{-1}\|$ . Comme  $T^{-1} \neq 0$ ,  $D > 0$ .  $\square$

## 6.15 Graphe d'un opérateur.

Soient des espaces vectoriels  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$ , et un opérateur linéaire  $T : X \rightarrow Y$ . Le **graphe** de  $T$  est défini par

$$G(T) = \{(x, y) \in X \times Y : y = Tx\}.$$

## 6.16 Evn produit.

Soient des evn  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$ . Le **produit cartésien**  $X \times Y$  muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire de la manière suivante est un espace vectoriel :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad , \quad \alpha(x, y) := (\alpha x, \alpha y).$$

Nous munissons  $X \times Y$  de la norme  $\|\cdot\|_{X \times Y}$  définie par

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Si  $X$  et  $Y$  sont complets, alors  $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$  l'est aussi (le vérifier!).

## 6.17 Théorème du graphe fermé.

Soient des espaces de Banach  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$ , et soit un opérateur linéaire  $T : X \rightarrow Y$ . Alors  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  si et seulement si  $G(T)$  est fermé dans  $X \times Y$ .

*Démonstration.* 1) Supposons tout d'abord que  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  et considérons une suite quelconque  $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G(T)$  qui converge vers  $(x, y) \in X \times Y$ , autrement dit  $\|x_n - x\|_X + \|y_n - y\|_Y \rightarrow 0$ . Ceci implique que  $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$  et  $\|y_n - y\|_Y \rightarrow 0$ . Comme  $T$  est continu (cf §3.4) et  $x_n \rightarrow x$  dans  $X$ , nous obtenons que

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y,$$

et donc  $(x, y) \in G(T)$ . Ceci montre que  $G(T)$  est fermé.

2) Supposons maintenant que  $G(T)$  est fermé. Alors  $(G(T), \|\cdot\|_{X \times Y})$  est un espace de Banach (car  $G(T)$  est fermé et  $X \times Y$  est complet ; voir l'exercice

3 de la série 1). L'opérateur linéaire  $P : G(T) \rightarrow X$  défini par  $P(x, Tx) := x$  est borné :

$$\forall (x, Tx) \in G(T) \quad \|P(x, Tx)\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X \times Y},$$

et bijectif. Par le théorème de l'inverse borné, il admet un inverse  $P^{-1}$  dans  $\mathcal{L}(X, G(T))$ . Nous obtenons alors, pour tout  $x \in X$ , que

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &\leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X \times Y} \\ &= \|P^{-1}x\|_{X \times Y} \leq \|P^{-1}\| \|x\|_X, \end{aligned}$$

et donc  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . □

## 6.18 Définition : opérateur fermé.

Soient des evn  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$ , et un opérateur linéaire  $T : X \rightarrow Y$ .  $T$  est dit *fermé* si  $G(T)$  est fermé dans l'evn  $X \times Y$ .

## 6.19 Définitions.

Soit un espace vectoriel  $X$  et soient des sous-espaces vectoriels  $Y$  et  $Z$ . Si chaque  $x \in X$  s'écrit d'une manière unique

$$x = y + z \text{ avec } y \in Y \text{ et } z \in Z,$$

on dit que  $X$  est la *somme directe* de  $Y$  et  $Z$ , noté  $X = Y \oplus Z$ .  $Y$  est dit être un *complément* de  $Z$  et vice versa.

Si  $X = Y \oplus Z$ , les applications  $P : X \rightarrow X$  et  $Q : X \rightarrow X$  définies par

$$(x = y + z \text{ avec } y \in Y \text{ et } z \in Z) \Leftrightarrow (y = Px \text{ et } z = Qx)$$

sont linéaires. Elles sont appelées les *projections* sur  $Y$  et  $Z$  respectivement. Elles vérifient  $I = P + Q$ , où  $I : X \rightarrow X$  est l'application identité. Comme  $P y = y$  pour tout  $y \in Y$ , on obtient  $P(Px) = Px$  pour tout  $x \in X$  et donc  $P^2 = P$ . On dit que  $P$  est *idempotent* ( $Q$  l'est aussi).

D'une manière plus générale, si  $Y$  et  $Z$  sont deux sous-espaces vectoriels quelconques de  $X$ , on définit le sous-espace vectoriel

$$Y + Z := \{y + z : y \in Y, z \in Z\}$$

(la *somme* de  $Y$  et  $Z$ ).

## 6.20 Théorème.

Soit un espace de Banach  $X$  et soient deux sous-espaces vectoriels *fermés*  $Y$  et  $Z$  tels que  $X = Y + Z$  (somme pas nécessairement directe). Alors il existe  $\beta > 0$  tel que

$$\forall x \in X \exists y \in Y \exists z \in Z \quad (x = y + z, \|y\| \leq \beta\|x\| \text{ et } \|z\| \leq \beta\|x\|).$$

*Démonstration.* Notons la norme sur  $X$  par  $\|x\|$ , munissons  $Y$  et  $Z$  de la norme  $\|\cdot\|$  et  $Y \times Z$  de la norme  $\|(y, z)\|_{Y \times Z} := \|y\| + \|z\|$ . Comme  $Y$  et  $Z$  sont fermés dans l'espace complet  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont des espaces de Banach, et  $Y \times Z$  aussi.

Soit l'opérateur linéaire  $T : Y \times Z \rightarrow X$  défini par  $T(y, z) = y + z$ . Il est borné car

$$\|T(y, z)\| = \|y + z\| \leq \|y\| + \|z\| = \|(y, z)\|_{Y \times Z}$$

Il est aussi surjectif car  $X = Y + Z$ . Par le §6.12, il existe  $c > 0$  tel que  $B_X(0, c) \subset T(B_{Y \times Z}(0, 1))$ . Ainsi, si  $\|x\| < c$ , il existe  $y \in Y$  et  $z \in Z$  tels que  $x = y + z$  et  $\|(y, z)\|_{Y \times Z} = \|y\| + \|z\| < 1$ . En particulier, si  $\|x\| = \frac{c}{2}$ , il existe  $y \in Y$  et  $z \in Z$  tels que  $x = y + z$  et  $\|y\| + \|z\| \leq \frac{2}{c}\|x\|$ . Par homogénéité,

$$\forall x \in X \exists y \in Y \exists z \in Z \left( x = y + z \text{ et } \|y\| + \|z\| \leq \frac{2}{c}\|x\| \right).$$

On peut donc choisir  $\beta = \frac{2}{c}$ . □

## 6.21 Corollaire.

Soient  $X, Y$  et  $Z$  comme au §6.20. Si de plus  $X = Y \oplus Z$ , alors les projections  $P : X \rightarrow X$  et  $Q : X \rightarrow X$  correspondantes sur  $Y$  et  $Z$  sont bornées.

*Démonstration.* Soit  $\beta > 0$  donné par le §6.20. Pour tout  $x \in X$ , le §6.20 assure qu'il existe  $y \in Y$  et  $z \in Z$  tels que  $x = y + z$ ,  $\|y\| \leq \beta\|x\|$  et  $\|z\| \leq \beta\|x\|$ . Comme  $X = Y \oplus Z$ ,  $y$  et  $z$  sont uniques et valent  $Px$  et  $Qx$  respectivement. D'où  $\|Px\| \leq \beta\|x\|$  et  $\|Qx\| \leq \beta\|x\|$ . Ainsi  $P, Q \in \mathcal{L}(X)$  et  $\|P\|, \|Q\| \leq \beta$ . □

## Bibliographie

1. E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley.
2. Elements of Functional Analysis, I. J. Maddox, Cambridge Univ. Press.
3. H. Brezis, Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Dunod.
4. A. Friedman, Foundations of Modern Analysis, Dover Publications.
5. K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag.