SÉRIE 8

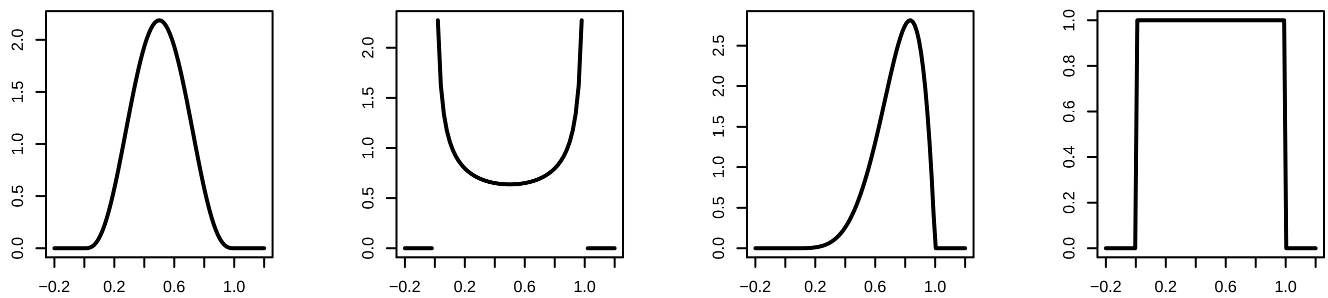
Exercice 1. La loi Beta(α, β) de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ est une loi continue avec la densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & \text{si } x \in (0,1), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

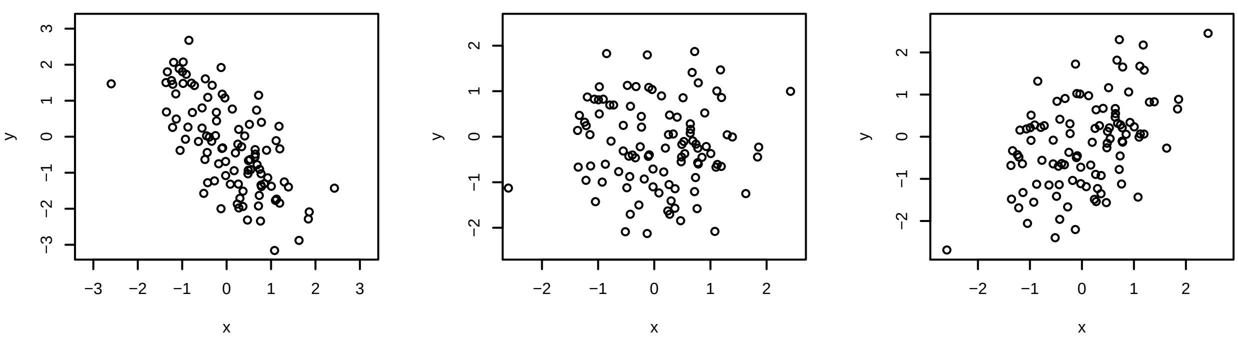
où Γ est la fonction gamma. Dans le cas où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que pour une variable aléatoire $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, on a $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et $\text{Var}[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$. Liez les densités ci-dessous avec les lois Beta$(0.5, 0.5)$, Beta$(1, 1)$, Beta$(4, 4)$, et Beta$(6, 2)$.



Exercice 2. Considérons les variables aléatoires X et Y telles que $\text{corr}(X, Y) = r$. On observe quelques réalisations de (X, Y) et on dessine le scatterplot des valeurs observées. Liez les scatterplots suivants avec les situations $r = 0$, $r = 0.5$, $r = -0.7$.



Exercice 3. Les questions suivantes peuvent être traitées séparément.

(i). On considère la variable aléatoire X telle que

$$\Pr(X \leq x) = \begin{cases} 1 - 1/x^2, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$$

Trouver la fonction de densité de $Y = 1/X$.

(ii). Trouver la médiane de $\exp(U)$, où U suit une loi uniforme $U(a,b)$ pour $a < b$.

(iii). Supposons que X suit une loi normale avec espérance 2 et telle que $\Pr(X > 6) = 0.1$. Trouver $\Pr(X < 0)$.

Exercice 4. Soit $\alpha \in (0,1)$.

(i). On considère la variable aléatoire X suivant une loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$. Exprimer le $(1-\alpha)$-quantile en fonction du α-quantile, $\Phi^{-1}(\alpha)$.

(ii). On considère maintenant la variable aléatoire Y suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Exprimer son α- quantile en fonction de $\Phi^{-1}(\alpha)$.

(iii). Donner la valeur des 0.8-quantile et 0.2-quantile d'une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(3, 0.25)$.

Exercice 5. Cet exercice porte sur la covariance dans un cas discret.

Une étude sur le travail dans le secteur de la construction a examiné la relation entre la durée du travail (heures par jour) et la productivité moyenne (unité produite). En dénotant $X =$"durée du travail" et $Y =$"productivité", la loi conjointe de X et Y est décrite par :

	$Y = 50$	$Y = 70$
$X = 8$	0.12	0.18
$X = 10$	0.20	0.40
$X = 12$	0.08	0.02

C'est-à-dire, $\Pr(X = 8, Y = 50) = 0.12$, etc..

(i). Calculer les espérances et les variances de X et Y.

(ii). Calculer $\mathrm{cov}(X,Y)$.

(iii). Supposons que le salaire brut journalier d'un travailleur est donné par une rémunération fixe de 30 CHF par heure plus une prime de 2 CHF multiplié par sa productivité. Quelle est la variance du salaire ?

Indice :

— Exprimer le salaire brut journalier en fonction de X et Y.

— Écrire la variance du salaire brut en fonction des variances de X et Y et de leur covariance.

Exercice 6. Soit $X \sim N(0,1)$. On définit une autre variable aléatoire $Y = X^2 - 1$. Trouver $Cov(X,Y)$. Peut-on en déduire quelque chose sur la dépendence (ou non) entre X et Y ? Calculer $\Pr(X \leq x | Y \leq 0)$ et déduire l'indépendance ou non de X et Y.

Remarque. Bien que X et Y soient toutes les deux continues, une densité conjointe $f_{X,Y}$ n'existe pas, et les densités conditionnelles n'existent pas non plus.

Exercice 7. Cet exercice illustre une autre relation entre la distribution de Poisson et la distribution Binomiale.

Soit M le nombre de pièces de monnaie trouvées par terre à la vieille ville de Berne après la Zibelemärit. On suppose que c'est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Parmi ces pieces, chacune d'elles a une probabilité $p \in (0,1)$ d'étre sur pile et $1-p$ d'être sur face, indépendamment des autres pièces. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces qui sont sur pile. Trouver la fonction de masse de X. Est-ce une loi vue en cours ?

Indice : Il faudra utiliser la loi des probabilités totales pour une partition infinie. Ceci donnera une somme infinie qu'il faudra évaluer, et une manière de le faire serait de la reconnaître comme la somme de probabilités données par une loi de Poisson.