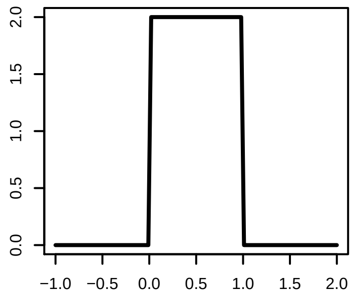
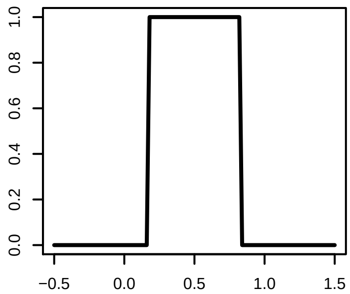
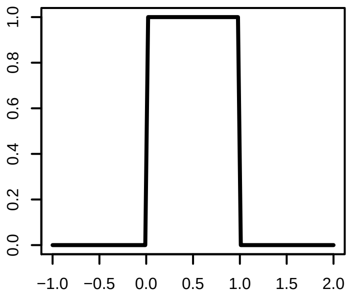
Série 5

Exercice 1. Un livre de 350 pages contient 450 fautes de frappes réparties au hasard. Calculer de deux façons différentes la probabilité qu'il y ait au moins 3 fautes sur une page donnée.

Exercice 2. Laquelle des fonctions suivantes est la densité d'une variable continue ? Reconnaissez-vous cette loi ?







Exercice 3. Pour chacune des fonctions de répartition suivantes, calculez la fonction de densité correspondante. Définissez-les sur tout $\mathbb{R}$.

(a) $F(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$ pour $x \geq 1$, et $F(x) = 0$ pour $x < 1$.

(b) $F(x) = 1/(1 + \mathrm{e}^{-x})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(c) $F(x) = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}\, t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in (0,1)$, $F(x) = 0$ pour $x \leq 0$, et $F(x) = 1$ pour $x \geq 1$ ($\alpha \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{N}$ sont des paramètres).

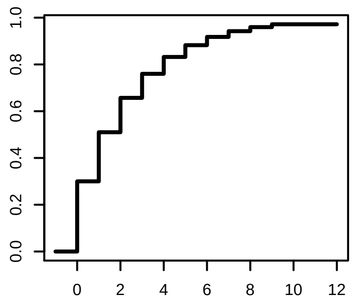
Exercice 4. Pour chacune des fonctions de densité suivantes, calculez la fonction de répartition correspondante. Définissez-les sur tout $\mathbb{R}$.

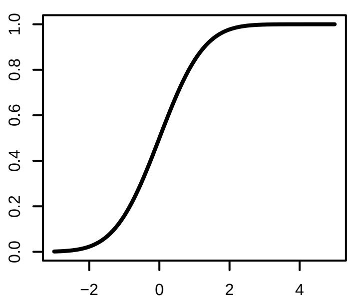
(a) $f(t) = \frac{1}{\pi\,(1+t^2)}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

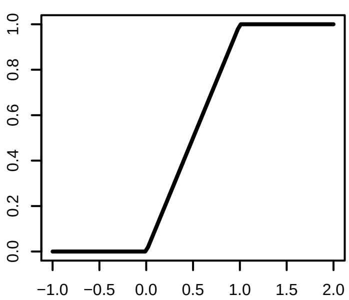
(b) $f(t) = k\,t^{k-1}\mathrm{e}^{-t^k}$ pour $t \geq 0$ et $f(t) = 0$ pour $t < 0$ ($k \in \mathbb{N}$ est un paramètre).

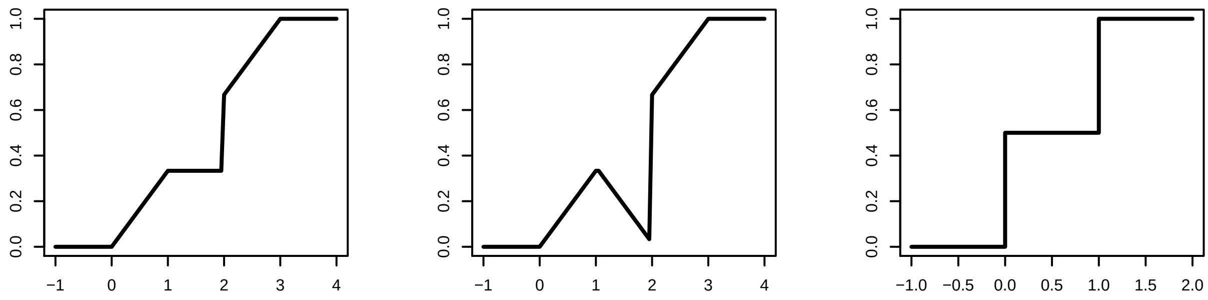
(c) $f(t) = 4\,t^3$ pour $t \in (0,1)$, et $f(t) = 0$ pour $t \notin (0,1)$.

Exercice 5. Est-ce que les fonctions suivantes sont des fonctions de répartition ? Si oui, le sont-elles pour des variables discrètes ou continues ?









Pouvez-vous retrouver la fonction de répartition correspondant à la densité de l'exercice 1 ?

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est $f(x) = cx^{-4}$ pour $x \geq 1$, et $f(x) = 0$ pour $x < 1$.

(a) Trouvez la constante c.

(b) Cherchez la fonction de répartition correspondante dans l'exercice 2.

(c) Calculez les probabilités $P(X < 1)$, $P(X > 1)$, $P(1 < X \leq 2)$, $P(X \leq 2)$ et $P(0 < X \leq 3)$.

(d) Calculez la probabilité $P(X > 2 \,|\, X < 3)$.

Exercice 7. Considérons la variable aléatoire X qui donne la durée de vie en années d'une télévision. Supposons que la loi de X est donnée par la densité $f(x) = \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}$ pour $x \geq 0$, et $f(x) = 0$ pour $x < 0$.

(a) Est-ce que c'est une des lois que vous avez vues en classe ?

(b) Calculez la probabilité que la télévision que vous venez d'acheter ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

(c) Vous possédez une telle télévision depuis 2 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore au moins de 10 ans à partir de maintenant ?

(d) Interprétez les résultats des parties (b) et (c). Est-ce que cela vous rappelle une propriété d'une loi discrète que nous avons étudiée la semaine passée ?