Série 3

NB : l'ordre des exercices **n'est pas** liée à leur difficulté. Les exercices avec une étoile sont plus difficiles.

Exercice 1. On dispose d'un jeu de 32 cartes (8 cartes de chaque couleur ; 4 dames au total). On tire 4 cartes au hasard.

(a) Quelle expérience aléatoire considérons-nous dans cet exercice ?

(b) Quel est l'ensemble fondamental Ω associé à cette expérience ? (Donnez quelques exemples d'événements élémentaires et décrivez le reste.)

(c) Comment définissez-vous la probabilité sur Ω ?

(d) En utilisant votre définition, calculez

   (i) la probabilité d'obtenir 4 dames ;

   (ii) la probabilité d'obtenir exactement 2 dames ;

   (iii) la probabilité d'obtenir au moins 2 dames ;

   (iv) la probabilité d'obtenir 4 cartes d'une même couleur.

Exercice 2. Un étudiant suit un cours d'analyse et un cours de statistique. La probabilité de réussir l'examen d'analyse est de 0.5, tandis que celle de réussir l'examen de statistique est de 0.7. La probabilité de réussir les deux examens est de 0.3.

(a) Calculez la probabilité de réussir au moins un des deux cours.

(b) Calculez la probabilité d'échouer aux deux cours.

(c) Calculez la probabilité d'échouer en statistique et de réussir en analyse.

(d) Calculez la probabilité d'échouer en analyse et de réussir en statistique.

Exercice 3. Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée vaut 0.9, celle que toutes deux soient occupées 0.5.

(i). Calculer la probabilité des évènements suivants :

   (a) la première salle est libre

   (b) les deux salles sont libres

   (c) l'une des deux salles au moins est libre

   (d) une seule salle est libre

   (e) la seconde salle est libre si l'on sait que la première est occupée

(ii). Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

A :La première salle est occupée,

B :La seconde salle est occupée.

Exercice 4. On lance une pièce de monnaie équilibrée à deux reprises, et ce, de façon indépendante et on observe le résultat des deux lancers.

(a) Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur pile au premier lancer ? Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur pile au premier lancer et sur face au deuxième ?

(b) Quelle expérience aléatoire considérons-nous dans cet exercice ?

(c) Quel est l'ensemble fondamental Ω associé à cette expérience ?

(d) Donnez un exemple d'événement élémentaire associé à cette expérience. Donnez un exemple d'événement associé à cette expérience.

(e) Comment interpréter l'expression "pièce équilibrée lancée de façon indépendante" en termes de probabilité sur chacun des événements élémentaires ?

(f) Calculez les deux probabilités en (**??**) en utilisant l'ensemble fondamental Ω et les événements appropriés.

Exercice 5. On jette deux dés équilibrés. Considérons les événements suivants :

$$\begin{aligned} A &= \text{obtenir un chiffre impair sur le premier dé,} \\ B &= \text{obtenir un chiffre pair sur le deuxième dé,} \\ C &= \text{la somme des deux chiffres est un chiffre impair.} \end{aligned}$$

(a) Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?

(b) Est-ce que les événements A et C sont indépendants ?

(c) Est-ce que les événements A, B et C sont indépendants ?

Exercice 6. Un joueur de tennis commet une faute sur la première balle avec une probabilité de $3/5$, et sur la deuxième avec une probabilité de $2/5$. Quelle est la probabilité d'une double faute ?

Exercice 7. On jette deux dés équilibrés. Si la somme des deux chiffres vaut 8, quelle est la probabilité d'avoir lancé un 6 ?

Exercice 8. * Alice, Benoît et Céline lancent une pièce de monnaie à tour de rôle jusqu'à l'apparition du premier pile. La personne qui obtient pile en premier gagne. Qui a la plus grande probabilité de gagner ?

Formulaire

(i). Le nombre de permutations de n éléments est $n!$.

(ii). Le nombre d'arrangements (i.e. en tenant compte de l'ordre) de k éléments parmi n est de : $\frac{n!}{(n-k)!}$. Par exemple, le nombre d'arrangements de 2 boules parmi les 4 boules B_1, B_2, B_3, B_4 est de $\frac{4!}{2!} = 12$, i.e.

$$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_1, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_1, B_3B_2, B_3B_4, B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3.$$

(iii). Le nombre de combinaisons (i.e. sans tenir compte de l'ordre) de k éléments parmi n est de : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Par exemple, le nombre de combinaisons de 2 boules parmi les 4 boules B_1, B_2, B_3, B_4 est de $\frac{4!}{2!2!} = 6$, i.e.

$$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_4.$$

(iv). Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, alors $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.