

---

11

---

---

---

---



$$\textcircled{1.53} \quad b_{r,6^2}(a\delta_n^2)$$

$$= \delta^2 \left( a \left( \frac{n-1}{n} \right) - 1 \right)$$

$$\text{Var}_{r,6^2}(a\delta_n^2) = \text{Var} \left( \frac{an\delta_n^2}{n} \right)$$

$$= \frac{a^2}{n^2} \text{Var}(n\delta_n^2) = \frac{a^2}{n^2} 2\delta^4(n-1)$$

$$\text{EQM}_{r,6^2}(a\delta_n^2) = \frac{a^2}{n^2} 2\delta^4(n-1) + \delta^4 \left( a \frac{n-1}{n} - 1 \right)^2$$

Il faut minimiser par rapport à  $a$

$$\frac{\partial}{\partial a} = 6^4 \frac{2(n-1)}{n^2} a$$

$$+ 6^4 2 \left( a^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) \frac{n-1}{n}.$$

$$\frac{\partial}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{n}{n+1}}$$

(algèbre)

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 a} > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

Le meilleur estimateur est

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

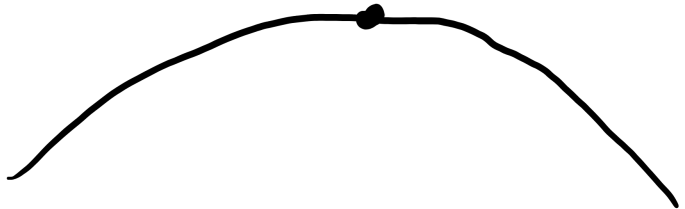
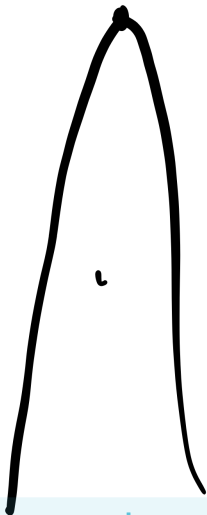
pour minimiser le biais  $\rightarrow a = \frac{n}{n-1}$   
 pour minimiser la var  $\rightarrow a = 0$

---

(166) méthode delta

avec  $g = (l')^{-1}$

" $J_n = I_n$ "



$$(167) \quad \ell(\lambda) = n \log \lambda - \lambda n \bar{X}_n$$

$$\ell'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - n \bar{X}_n$$

$$\ell''(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2}$$

$$I_n = -E_\lambda \left[ -\frac{n}{\lambda^2} \right] = \frac{n}{\lambda^2}$$

rien d'aléatoire

$$\hat{\lambda}_{ML} \overset{\text{app}}{\sim} \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\lambda^2}{n}\right)$$

$$(\text{on a vu } \hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{\bar{X}_n})$$

$$J_n = -\mathcal{L}''(\hat{\mu}_n) = \frac{n}{\hat{\sigma}_n^2} \\ = n \overline{X}_n^2$$

---

(171)  $\Pr\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z_n \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

$= 1 - \alpha$ , où  $z_\beta$  est tel  
que  $\Pr(Z_n \leq z_\beta) = \beta$ .

(comme la loi de  $Z_n$   
ne dépend pas de  $\mu$ ,

$$\forall \mu \in \mathbb{R} \quad P_{\mu} \left( z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z_n \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$= 1 - \alpha$$

Then

$$1 - \alpha = P_{\mu} \left( z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{Y}_n - \mu) \sqrt{n}}{\sqrt{\sigma^2}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$= P_{\mu} \left( -\bar{Y}_n + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq -\bar{Y}_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= P_{\mu} \left( \bar{Y}_n - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{Y}_n + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right)$$

Par symétrie  $z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ .

173

$$\left[ \bar{Y}_n \pm \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right] \quad \alpha = 0,05$$

$$= \left[ 5,34 \pm \frac{z_{0,975}}{\sqrt{64=8}} 0,12 \right]$$

$$\approx \left[ 5,34 \pm \frac{1,96}{8} 0,12 \right]$$

$$\approx [5.37, 5.37]$$

---

$$(175) \alpha = 0.05$$

$$t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{8, 0.975}$$

$$= 2.306$$

$$\left[ \bar{Y}_n \pm \frac{2.306}{\sqrt{n}} s_n \right]$$

$$= \left[ \checkmark 90 \pm \frac{2.306}{3} 16 \right]$$

$$= [1027.8, 1052.2]$$

$$\textcircled{180} \quad P_{\theta}(T_n \leq t) = P_{\theta}(M_n \leq t\theta) \\ \text{ex 12.1} \quad \left(\frac{t\theta}{\theta}\right)^n = t^n \quad \forall t \in [0, 1]$$

ne dépend pas de  $\theta$ . Donc  
c'est un pivot. L'IC correspondant  
est  $[M_n, \alpha^{-1/n} M_n]$

$$\textcircled{182} \quad L(\lambda) = e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{Y_i}}{Y_i!}$$

(algèbre) :  $\hat{\lambda}_{ML} = \bar{Y}_n$

$$L''(\lambda) = -\frac{n\bar{Y}_n}{\lambda^2} \quad J_n(\hat{\lambda}_{ML}) = \frac{n}{\bar{Y}_n}$$

I (  $\left[ \bar{Y}_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{Y}_n}{n}} \right]$  )  
 approximates  $z_{0.95} \approx 1.64$  (table)

(183)  $E[Y_i] = \frac{\theta}{2}$   
 $\text{Var}_\theta[Y_i] = \frac{\theta^2}{12}$  (algebra)

$\sqrt{n} \frac{\bar{Y}_n - \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\theta^2/12}} \underset{T_n}{\sim} N(0,1)$   
 (TCL)

Donc

$1-\alpha \approx P_\theta \left( -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq T_n \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$

$$= \Pr_{\theta} \left( \frac{-\bar{Z}_n - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{12n}} + \frac{1}{2} \leq \frac{\bar{Y}_n}{\theta} \right. \\
\left. (\text{elgebre}) \leq \frac{\bar{Z}_n - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{12n}} + \frac{1}{2} \right) \\
= \Pr_{\theta} \left( \frac{\bar{Y}_n}{\left( \frac{\bar{Z}_n - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{12n}} + \frac{1}{2} \right)} \leq \theta \leq \frac{\bar{Y}_n}{\left( \frac{-\bar{Z}_n - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{12n}} + \frac{1}{2} \right)} \right)$$

On obtient un  $\mathbb{I}$  approximatif, dont la longueur est  $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  alors que pour  $[\mu_n, \mu_n e^{i\pi}]$

la longueur est  $O(\frac{1}{\epsilon})$   
bcp plus court.

---

$$\textcircled{186} Z_i = \text{diff}$$

$$= (-2, 6, 6, 5, -1, \dots)$$

$$\bar{Z}_n \approx 3,570$$

$Z_i < 0$  4 fois

$Z_i > 0$  10 fois

---

189

densité  $t_{n-1}$

rejet

$-v^*$

0

$v^*$

rejet  
bilatéral

Unilatéral

rejet

$-v^* < v^* < 0$

195  $Pr_{H_0}(T \leq -v^*)$

$= Pr_{H_0}(T \leq -v^*)$

$+ Pr_{H_0}(T \geq v^*)$

$= 2 Pr_{H_0}(T \geq v^*)$

$= \alpha \Leftrightarrow Pr_{H_0}(T \leq -v^*) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$$t_{obs} = \frac{999 - 1000}{\sqrt{69.88/10}}$$

(201)

IC du pivot de la dispositive 180.

Pour  $\alpha \in (0, 1)$  on choisit  $s > 0$  tel que  
 $\alpha = \Pr(T_n \leq s)$ . Donc

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \Pr(T_n > s) = 1 - \Pr(T_n \leq s) \\ &= 1 - \Pr_{\theta} \left( \frac{M_n}{\theta} \leq s \right) = 1 - \Pr_{\theta} \left( \theta \geq \frac{M_n}{s} \right) \\ &= \Pr_{\theta} \left( \frac{M_n}{s} \geq \theta \right) \end{aligned}$$

$M_n$  continue

Pour trouver  $s$  on a  $\alpha = \Pr(T_n \leq s) = s^n$   
donc  $s = \alpha^{1/n}$  et on obtient IC  
 $[-\infty, M_n \alpha^{-1/n}]$ . Or, forcément

$\theta \geq M_n$  donc on peut prendre  
 $[M_n, M_n \alpha^{-1/n}]$ .

Remarque On aurait pu commencer par choisir  $t$  tel que  $\alpha = \Pr(T_n \geq t)$ . Cela amène à l'intervalle  $[M_n(1-\alpha)^{1/n}, \infty)$  qui est également un intervalle de confiance valide.



