

Exemple : maximum de vraisemblance

Exemple Supposons que $x_1, \dots, x_n$ soient des réalisations i.i.d. d'une loi exponentielle,

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

Trouver $\hat{\lambda}_{\text{ML}}$.

Solution : On a la fonction de vraisemblance et son logarithme

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i}$$

$$\ell(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log \lambda - \lambda x_i = n \log \lambda - n \lambda \bar{x}_n$$

$$\ell'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - n \bar{x}_n = 0 \iff \lambda = 1/\bar{x}_n$$

$$\ell''(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$$

Donc notre solution correspond à un maximum et $\hat{\lambda}_{\text{ML}} = 1/\bar{x}_n$.