

# École Polytechnique Fédérale de Lausanne

## MATH-233– Midterm Probabilités et statistiques (PH)

Instructor : Anthony Davison

7 novembre 2019

Nom et prénom : \_\_\_\_\_

SCIPER : \_\_\_\_\_

---

Cet examen contient 4 pages (y compris la page de couverture) et 5 questions. Le total des points est 35, mais l'examen sera noté sur 30. Bonne chance !

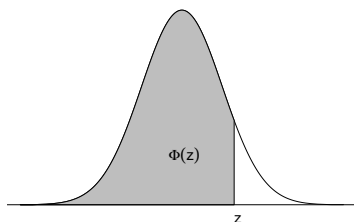
### Distribution of Marks

Question	Points	Score
1	10	
2	10	
3	5	
4	5	
5	5	
Total:	35	

### PROTOCOL :

- Aucun document personnel n'est autorisé.
- Les calculatrices simples sont permises. Il est interdit de s'échanger les calculatrices ou d'utiliser d'autres aides électroniques, y compris des natels.
- Justifiez vos réponses ! Une réponse non justifiée sera considérée comme fausse.
- Ecrivez vos réponses sur les feuilles d'examens. Si vous manquez de place, demandez une nouvelle feuille et agrafez-la.
- Vous avez le droit de questionner un assistant seulement si vous trouvez une faute de frappe. Sinon ils ne vont pas vous répondre. S'il vous semble qu'une question n'est pas claire, alors expliquez dans votre solution comment vous la comprenez.
- Des traductions anglaises des questions sont disponibles, mais la version française est celle de référence.
- Vous pouvez répondre en français ou en anglais.

# Distribution normale standard $\Phi(z)$



Pour  $z < 0$  on utilise symétrie :  $\Pr(Z \leq z) = \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56750	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84850	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92786	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

1. (10 points) Barthélemy rentre chez lui à la fin du festival Artiphys. Il a  $n$  clés dans sa poche droite, et il en choisit au hasard pour essayer d'ouvrir sa porte. Seule une des clés ouvre la porte. Il place dans sa poche gauche chaque clé qui ne l'ouvre pas, puis choisit encore au hasard dans sa poche droite.
  - (a) Donner un espace fondamental pour cet expérience aléatoire.
  - (b) Soit  $A_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) l'événement qu'il ouvre la porte à la  $r$ ème tentative. Calculer  $\Pr(A_r)$ .
  - (c) Combien de clés essayera-t-il en moyenne, avant de pouvoir entrer ?
  - (d) Bastien est dans la même situation, mais il remplace les clés qui ne marchent pas dans sa poche droite, puis en choisit une au hasard. Calculer sa  $\Pr(A_r)$ .

**English :** Barthélemy returns home after Artiphys. He has  $n$  keys in his right-hand pocket, and he chooses one at random to try and open the door. Only one key will open the door, and if he can't open the door, he places that key into his left-hand pocket, and tries again with a key from his right-hand pocket.

- (a) Give a sample space for this random experiment.
  - (b) Obtain the probabilities of the events  $A_r$ , 'he opens the door at the  $r$ th attempt'.
  - (c) How many keys does he expect to try, before he opens the door ?
  - (d) Bastien is in the same situation, but when a key fails he puts it back in his right-hand pocket, and chooses a key again at random. Calculate his  $\Pr(A_r)$ .
2. (10 points) Deux jobs sont soumis en même moment à un ordinateur à deux cores. Les temps d'exécution (heures) sont des variables aléatoires  $U(0, 3)$  indépendantes. Soit  $X$  le plus grand temps d'exécution des deux.
  - (a) Démontrer que  $X$  a fonction de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} 2x/9, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (b) Trouver le temps moyen jusqu'à ce que les deux cores soient libres.
  - (c) Après une heure, l'ordinateur n'a pas encore terminé. Donner alors le temps moyen jusqu'à ce que les deux cores soient libres.
  - (d) Après deux heures, les jobs sont terminés. Trouver la probabilité que  $X < 1.5$ h.

**English :** Two large jobs are submitted simultaneously to a computer with two cores. The run times (hours) for the jobs are independent  $U(0, 3)$  random variables. Let  $X$  denote the longest run time.

- (a) Show that the probability density function of  $X$  is

$$f(x) = \begin{cases} 2x/9, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

- (b) Find the expected waiting time until both processors are free.
  - (c) The computer is still running after one hour. At that time, what is the expected remaining waiting time until both cores are free ?
  - (c) When I check after two hours, both jobs are done. What is the probability that the longest run time was less than 1.5 hours ?

3. (5 points) En hiver la température moyenne à Rome suit une loi gaussienne d'espérance  $10^{\circ}\text{C}$  et de déviation standard  $4^{\circ}\text{C}$ . On déclare un état de froid extrême si la température moyenne est en-dessous de  $4^{\circ}\text{C}$ . Les températures hivernales sont indépendantes d'année en année.

- (a) Donner la probabilité qu'un état de froid extrême sera déclaré cet hiver.
- (b) Donner la probabilité qu'un état de froid extrême sera déclaré au plus deux fois pendant dix hivers successifs.

**English :** The average winter temperature in Rome follows a normal distribution with mean  $10^{\circ}\text{C}$  and standard deviation  $4^{\circ}\text{C}$ . A state of extreme cold is decreed if the average winter temperature is lower than  $4^{\circ}\text{C}$ . Temperatures from one winter to another are independent.

- (a) What is the probability that a state of extreme cold will be decreed this winter ?
- (b) What is the probability that the state of extreme cold is declared at most twice in ten successive winters ?

4. (5 points) Si  $X \sim \exp(\lambda)$ , trouver la fonction de répartition de  $Y = 1/X$ , et donner  $E(Y)$ .

**English :** If  $X \sim \exp(\lambda)$ , find the distribution function of  $Y = 1/X$ , and obtain  $E(Y)$ .

5. (5 points) **(Bonus)**

A new scientific truth does not triumph by convincing its opponents and making them see the light, but rather because its opponents eventually die, and a new generation grows up that is familiar with it. (Max Planck, *Scientific Autobiography and Other Papers*)

Albert, Werner et Niels sont en profond désaccord sur les fondements de la mécanique quantique, alors Max organise un duel à trois voies pour régler la question. Albert est un tireur médiocre, atteignant sa cible seulement  $1/3$  du temps en moyenne. Werner est meilleur, atteignant sa cible  $2/3$  du temps. Niels frappe sa cible à chaque fois. Ils tirent à tour de rôle, d'abord Albert, puis Werner, puis Niels, puis Albert encore, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un physicien vivant. Montrez que le meilleur plan d'action d'Albert est de tirer en l'air lors de son premier tir, ce qui le rend le plus susceptible des trois de survivre.

*Indication :* Si deux duellistes avec des probabilités de succès  $p$  et  $q$  se tirent tour à tour jusqu'à ce que l'un d'eux frappe l'autre, montrez que le premier, qui a la probabilité de succès  $p$ , gagne le duel avec probabilité  $p/(p + q - pq)$ .

**English :** Albert, Werner and Niels disagree strongly about the foundations of quantum mechanics, so Max arranges a three-way duel to settle the matter. Albert is a poor shot, hitting his target only  $1/3$  of the time on average. Werner is better, hitting his target  $2/3$  of the time. Niels hits his target every time. They take turns shooting, first Albert, then Werner, then Niels, then back to Albert, and so on until only one physicist is left. Show that Albert's best course of action is to fire into the air on his first shot, and this makes him the most likely of the three to survive.

*Hint :* If two duellists with success probabilities  $p$  and  $q$  shoot at each other alternately until one hits the other, show that the first, who has success probability  $p$ , wins the duel with probability  $p/(p + q - pq)$ .