

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

MATH-234(a)– Test Probabilités et statistique (GC)

Instructor : Anthony Davison

12 Novembre 2021

Nom et prénom : _____

SCIPER : _____

Cet examen contient 5 pages (y compris la page de couverture) et 4 questions. Le total des points est 33, mais l'examen sera noté sur 30. Bonne chance!

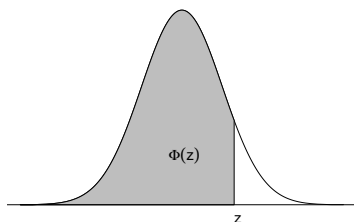
Distribution of Marks

Question	Points	Score
1	8	
2	10	
3	10	
4	5	
Total:	33	

PROTOCOL :

- Aucun document personnel n'est autorisé.
- Les calculatrices simples sont permises. Il est interdit de s'échanger les calculatrices ou d'utiliser d'autres aides électroniques, y compris des natels.
- Justifiez vos réponses ! Une réponse non justifiée sera considérée comme fausse.
- Ecrivez vos réponses sur les feuilles d'examens. Si vous manquez de place, demandez une nouvelle feuille et agrafez-la.
- Vous avez le droit de questionner un assistant seulement si vous trouvez une faute de frappe. Sinon ils ne vont pas vous répondre. S'il vous semble qu'une question n'est pas claire, alors expliquez dans votre solution comment vous la comprenez.
- Des traductions anglaises des questions sont disponibles, mais la version française est celle de référence.
- Vous pouvez répondre en français ou en anglais.

Distribution normale standard $\Phi(z)$



Pour $z < 0$ on utilise symétrie : $\Pr(Z \leq z) = \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$, $z \in \mathbb{R}$.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56750	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84850	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92786	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

1. (8 points) D'après une loi fédérale américaine, des démarches doivent être entreprises quand les taux de plomb de 10% ou plus des prélèvements d'eau potable d'une ville excèdent 15 parties par milliard (ppb). Les données présentées dans la Figure 1 sont des prélèvements d'eau du robinet de Flint, Michigan, dont les habitants se sont plaints de la décoloration de l'eau potable. Trois cents kits d'échantonnage ont été envoyés à des foyers choisis aléatoirement et 271 de ces foyers ont renvoyé trois échantillons d'eau du robinet : échantillon 1, prélevé de l'eau provenant directement du robinet ; échantillon 2, prélevé après avoir laissé couler l'eau pendant 15 secondes ; et l'échantillon 3, prélevé après avoir laissé couler l'eau pendant deux minutes.

- (a) Considérez le graphique de gauche dans la Figure 1.
- (i) Expliquez comment une boîte à moustaches est construite.
 - (ii) Que déduisez-vous de ce graphique ?
- (b) Le niveau de 15 ppb est dépassé par 45 éléments de l'échantillon 1, et

$$\sum_{r=45}^{271} \binom{271}{r} 0.1^r 0.9^{271-r} \approx 0.0003.$$

Que représente ce calcul ? Pensez-vous que des démarches doivent être entreprises ?

- (c) Que déduisez-vous du graphique de droite dans la Figure 1 ?

English : According to US federal law, action should be taken if levels of lead in 10% or more samples of drinking water in a town exceed 15 parts per billion (ppb). The data shown in Figure 1 below are samples of tap water in Flint, Michigan, where residents complained about discoloured drinking water. Three hundred sampling kits were sent out to households chosen at random, and 271 of these households each returned three samples of tap water : sample 1, taken from the first water to come out of the tap ; sample 2, taken after letting the water run for 15 seconds ; and sample 3, taken after letting the water run for two minutes.

- (a) Consider the left panel of Figure 1.
- (i) Explain how a boxplot is constructed.
 - (ii) What do you learn from the panel ?
- (b) The level 15 ppb is exceeded by 45 of the elements of sample 1, and

$$\sum_{r=45}^{271} \binom{271}{r} 0.1^r 0.9^{271-r} \approx 0.0003.$$

What does this calculation represent ? Do you think that action should be taken ?

- (c) What do you learn from the right panel of Figure 1 ?

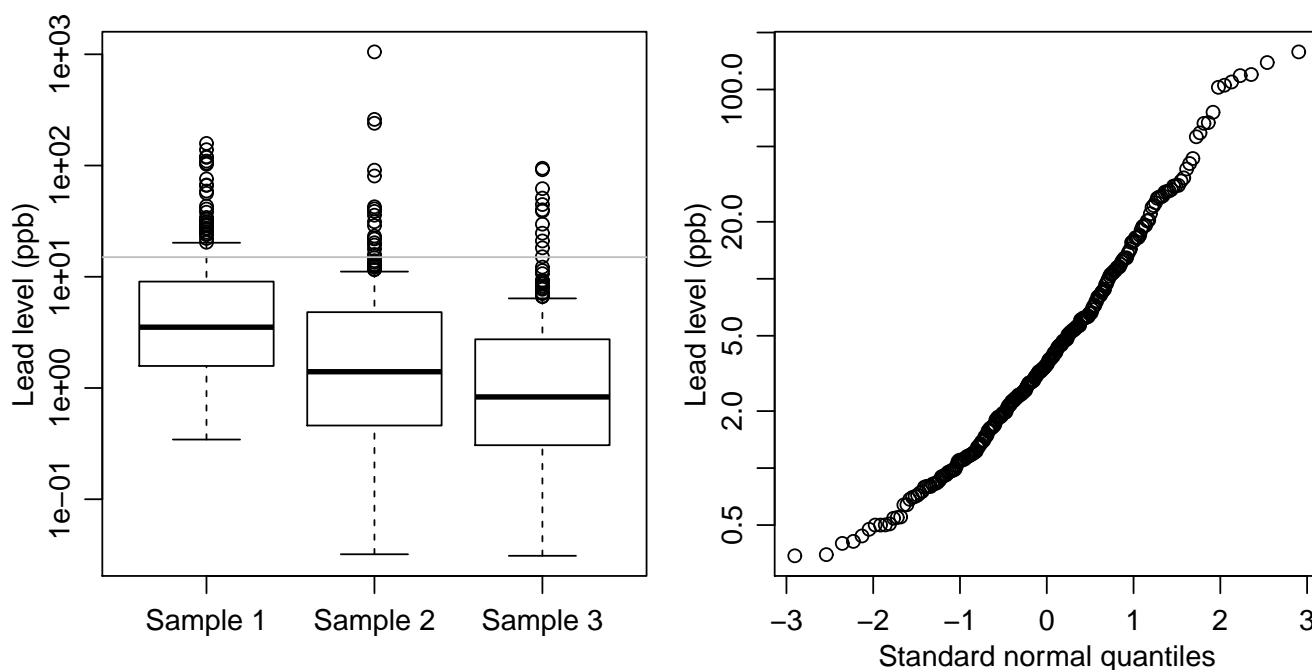


FIGURE 1 – Flint lead data. Left : boxplots of the sampled lead levels, with horizontal line showing 15 ppb. Right : lead levels for sample 1. Note the log scales in both panels.

2. (10 points) On lance deux fois de suite une pièce qui tombe face avec probabilité $p \in (0, 1)$ et on note les résultats.
 1. (a) Ecrire l'espace fondamental pour cette expérience, et donner les probabilités des résultats.
 2. (b) Donner les probabilités des événements A_1 , 'le premier lancer donne face', A_2 , 'le second lancer donne face', et B , 'il y a exactement une face'.
 3. (c) Si la pièce est équilibrée, les événements A_1 , A_2 et B sont-ils (i) indépendants deux-à-deux ? (ii) mutuellement indépendants ?
 4. (d) Donner la probabilité que le premier lancer donne face sachant qu'il y a exactement une face à l'issue des deux lancers. A partir de là, déduire comment vous pourriez reproduire le résultat d'une expérience aléatoire où on lance une seule pièce équilibrée.

English : A coin that shows a head with probability $p \in (0, 1)$ is thrown twice in succession, and the outcomes are recorded.

- (a) Write down the sample space for this experiment, and give probabilities for the outcomes.
- (b) Give the probabilities of the events A_1 , 'the first toss shows a head', A_2 , 'the second toss shows a head', and B , 'there is exactly one head'.
- (c) If the coin is fair, are the events A_1 , A_2 and B (i) pairwise independent ? (ii) mutually independent ?
- (d) Give the probability of seeing heads on the first throw, conditional on there being one head and one tail. Hence explain how you could mimic the outcome of the random experiment that involves tossing a single fair coin, whatever the value of p .

3. (10 points) Chaque matin, de lundi à vendredi, je prends le bus à 7h45, puis le train à 8h00. Le voyage en bus devrait prendre 10 minutes, mais, en moyenne un jour sur les cinq, il met X minutes de plus, où $X \sim \mathcal{N}(3, 1)$. Je rate le train si le bus a plus de 4 minutes de retard.
1. (a) Quelle est la probabilité que je réussisse à prendre le train lundi prochain ?
 2. (b) Si le bus a déjà 3 minutes de retard, quelle est la probabilité que je rate le train ?
 3. (c) J'ai réussi à prendre le train ce matin. Quelle est la probabilité que le bus ait eu du retard ?
 4. (d) A quelle heure puis-je espérer arriver à la gare ?

English : Each weekday morning I take the bus at 7.45 in order to catch the train at 8.00. The bus journey should take 10 minutes, but on one weekday each week, on average, it takes an additional X minutes, where $X \sim N(3, 1)$. I miss my train if the bus is more than 4 minutes late.

- (a) What is the probability that I will catch the train next Monday ?
 - (b) If the bus is already 3 minutes late, what is the probability that I will miss the train ?
 - (c) I caught the train this morning. What is the probability that the bus was late ?
 - (d) At what time do I expect to arrive at the station ?
4. (5 points) Les pièces d'une voiture sont souvent copiées et vendues comme des pièces originales. Avec probabilité $1/4$ on achète une pièce pirate, et avec probabilité $3/4$ on achète une pièce originale. La durée de vie est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 5$ pour une pièce pirate, de paramètre $\lambda = 2$ pour une pièce originale.
- Appelons T la durée de vie de la pièce qu'on achète. Supposons que la pièce ait survécu jusqu'au temps t après son installation. Quelle est la probabilité que cette pièce soit pirate ? Trouver la limite de cette probabilité quand $t \rightarrow \infty$.

English : Car components are often copied and sold as original pieces. Assume a probability $1/4$ of buying a pirated component, and a probability $3/4$ of buying an original one. The lifespan of a component is an exponential random variable, with parameter $\lambda = 5$ if it is pirated and $\lambda = 2$ if it is original.

Let T denote the lifespan of a component that has been bought, and assume that it lasts until time t after being installed. What is the probability that it is pirate ? Find the limit of this probability when $t \rightarrow \infty$.