

CORRIGÉ 8

Exercice 1. Les densités sont dans l'ordre : Beta(4, 4), Beta(0.5, 0.5), Beta(6, 2), et Beta(1, 1).

Exercice 2. Les scatterplots sont (dans l'ordre) : $r = -0.7$, $r = 0$, $r = 0.5$.

Exercice 3. (i). On a

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(1/X \leq y).$$

Pour $y \leq 0$ cette probabilité vaut zéro. Pour $y > 0$ on utilise la monotonie (décroissance) de la fonction $1/x$ et le fait que $\Pr(X = t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (X étant continue).

$$\begin{aligned} \Pr(1/X \leq y) &= \Pr(X \geq 1/y) = 1 - \Pr(X < 1/y) = 1 - \Pr(X \leq 1/y) = 1 - \begin{cases} 1 - 1/(1/y)^2, & 1/y > 1 \\ 0, & 1/y \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} y^2 & y < 1 \\ 1 & y \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 2y & 0 < y \leq 1 \\ 0 & y \notin [0, 1]. \end{cases}$$

(ii). On cherche $y_{0.5}$ telle que

$$\frac{1}{2} = \Pr(Y \leq y_{0.5}) = \Pr(U \leq \log y_{0.5}).$$

Comme pour tout $u \in [a, b]$ on a $\Pr(U \leq u) = (u - a)/(b - a)$, il faut résoudre l'équation

$$\frac{1}{2} = \frac{\log(y_{0.5}) - a}{b - a},$$

donc $y_{0.5} = \exp\{(a + b)/2\}$. Donc médiane($\exp(U)$) = $\exp(\text{médiane}(U))$, ce qui est vrai pour n'importe quelle U et n'importe quelle fonction strictement croissante.

(iii). On sait que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 2$ mais de variance σ^2 inconnue. On note d'abord que

$$0.1 = \Pr(X > 6) = 1 - \Pr\left(\frac{X - 2}{\sigma} < \frac{6 - 2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(4/\sigma)$$

de sorte que $\Phi(4/\sigma) = 0.9$ et $\sigma = 4/\Phi^{-1}(0.9)$. Avec le tableau de la loi normale $\Phi^{-1}(0.9) \approx 1.282$ et donc $\sigma \approx 3.12$.

Ensuite

$$\Pr(X < 0) = \Pr\left(\frac{X - 2}{\sigma} < \frac{0 - 2}{\sigma}\right) = \Phi(-2/\sigma) \approx \Phi(-0.64) \approx 0.26.$$

Exercice 4. (i). Soient x_α et $x_{1-\alpha}$ respectivement les α - et $(1 - \alpha)$ -quantiles de la loi normale standard. Cette loi étant continue, on a

$$\begin{cases} \Phi(x_\alpha) &= \alpha, \\ \Phi(x_{1-\alpha}) &= 1 - \alpha, \end{cases}$$

et donc $\Phi(x_{1-\alpha}) = 1 - \Phi(x_\alpha)$. Or, nous savons par symétrie que $1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Donc $\Phi(x_{1-\alpha}) = \Phi(-x_\alpha)$ et par conséquent $x_{1-\alpha} = -x_\alpha$.

- (ii). On standardise Y en soustrayant la moyenne puis en divisant par l'erreur standard, pour obtenir une variable Z suivant une loi normale standard. On obtient

$$\begin{aligned}\alpha &= \Pr(Y \leq y_\alpha) \\ &= \Pr\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{y_\alpha - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Pr\left(Z \leq \frac{y_\alpha - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{y_\alpha - \mu}{\sigma}\right) \\ \Leftrightarrow \Phi^{-1}(\alpha) &= \frac{y_\alpha - \mu}{\sigma} \\ \Leftrightarrow y_\alpha &= \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha).\end{aligned}$$

- (iii). En utilisant le résultat de la question 2., on a $y_{0.8} = 3 + \sqrt{0.25} \cdot \Phi^{-1}(0.8) \approx 3 + 0.5 \cdot 0.842 = 3.42$. De plus, en combinant les résultats 1. et 2., on obtient $y_{0.2} = 3 + \sqrt{0.25} \cdot \Phi^{-1}(0.2) \approx 3 - \sqrt{0.25} \cdot \Phi^{-1}(0.8) = 2.579$.

Exercice 5. (i). Les probabilités données dans le tableau correspondent aux probabilités conjointes de X et Y , $\Pr(X = x, Y = y)$, pour $x \in S_X = \{8, 10, 12\}$ et $y \in S_Y = \{50, 70\}$.

La variable aléatoire X prend des valeurs dans $S_X = \{8, 10, 12\}$. En utilisant la formule pour les probabilités marginales, on déduit que la loi marginale de X est donné par :

$$\begin{aligned}P(X = 8) &= \sum_{y \in S_Y} f_{X,Y}(x, y) = 0.12 + 0.18 = 0.3, \\ P(X = 10) &= 0.2 + 0.4 = 0.6, \\ P(X = 12) &= 0.08 + 0.02 = 0.1.\end{aligned}$$

L'espérance de X est

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{x \in S_X} x f_X(x) \\ &= 8 \cdot 0.3 + 10 \cdot 0.6 + 12 \cdot 0.1 \\ &= 9.6.\end{aligned}$$

et sa variance est

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_{x \in S_X} x^2 f_X(x) - \{E(X)\}^2 \\ &= 64 \cdot 0.3 + 100 \cdot 0.6 + 144 \cdot 0.1 - 9.6^2 \\ &= 93.6 - 92.16 = 1.44.\end{aligned}$$

De même pour Y , on a

$$E(Y) = 50 \cdot 0.4 + 70 \cdot 0.6 = 62.$$

et

$$\text{Var}(Y) = 50^2 \cdot 0.4 + 70^2 \cdot 0.6 - 62^2 = 9390 - 3844 = 96.$$

La covariance $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, où

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} xy f_{X,Y}(x, y) \\ &= 8 \cdot 50 \cdot 0.12 + 8 \cdot 70 \cdot 0.18 + \dots + 12 \cdot 70 \cdot 0.02 \\ &= 8 \cdot 50 \cdot 0.12 + 8 \cdot 70 \cdot 0.18 \\ &\quad + 10 \cdot 50 \cdot 0.2 + 10 \cdot 70 \cdot 0.4 \\ &\quad + 12 \cdot 50 \cdot 0.08 + 12 \cdot 70 \cdot 0.02 = 593.6. \end{aligned}$$

(ii). Le salaire brut journalier Z est une combinaison linéaire de X et Y , $Z = 30X + 2Y$. on a donc

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= \text{Var}(30X + 2Y) \\ &= \text{Var}(30X) + \text{Var}(2Y) + 2 \cdot \text{cov}(30X, 2Y) \\ &= 30^2 \text{Var}(X) + 2^2 \text{Var}(Y) + 2 \cdot 30 \cdot 2 \cdot \text{cov}(X, Y) \\ &= 900 \cdot 1.44 + 4 \cdot 96 + 120 \cdot 1.6 \\ &= 1488. \end{aligned}$$

Exercice 6. Par définition, $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3 - X) - E(X)E(X^2) = E(X^3)$, car $E(X) = 0$. De plus, la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\phi(x)$ est paire ($\phi(x) = \phi(-x)$), tandis que $x \rightarrow x^3$ est une fonction impaire. Donc, la fonction $g(x) := x^3 \phi(x)$ est une fonction impaire ($g(x) = -g(-x)$). Il s'ensuit que

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \phi(x) dx = 0,$$

et donc $\text{Cov}(X, Y) = 0$. (On peut aussi raisonner par l'intégration par parties :

$$\int x^3 \phi(x) dx = \int -x^2 \phi'(x) dx = -x^2 \phi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int -2x \phi(x) dx = 0$$

car $x^2 \phi(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$ et la $\int x \phi(x) dx = E(X) = 0$.)

Ce résultat nous dit qu'il n'y a pas de dépendance *linéaire* entre les deux variables. Cependant, il ne nous dit rien sur la dépendance globale (ici il est assez clair qu'il y a une forte dépendance entre X et Y). De manière générale, l'affirmation "covariance nulle $\Rightarrow$ indépendance" est fausse. (l'inverse est vrai).

On a

$$\Pr(X \leq x | Y \leq 0) = \Pr(X \leq x | -1 \leq X \leq 1)$$

Comme cette probabilité vaut zéro pour $x < -1$ alors que $\Pr(X \leq x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on conclut que X et Y sont dépendantes.

Exercice 7. Soit $M \sim \text{Pois}(\lambda)$ le nombre total de pièces. Alors X et M prennent des valeurs entiers (zéro inclus) et $M \geq X$. Sachant que $M = m$, $X \sim B(m, p)$ et donc pour $k \leq m$

$$\Pr(X = k | M = m) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

La loi des probabilités totales donne

$$\Pr(X = k) = \sum_{m=0}^{\infty} \Pr(X = k|M = m)\Pr(M = m) = \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{m-k} \lambda^m}{(m-k)!}$$

Posons $n = m - k$. On obtient

$$\Pr(X = k) = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n \lambda^n \lambda^k}{n!} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^n}{n!} e^{-\lambda(1-p)}$$

la somme étant égale à 1 puisque c'est la somme des probabilités d'une loi $\text{Poiss}(\lambda(1-p))$.
Ainsi $X \sim \text{Poiss}(\lambda p)$.