

CORRIGÉ 6

Exercice 1. (a) Discrète.

(b) Continue.

(c) Discrète.

(d) Discrète.

(e) Continue.

Exercice 2. (a) $X \sim \mathcal{B}(800, 0.02)$.

(b) Il s'agit de la loi de Poisson, $X \sim \text{Poiss}(16)$. Selon la loi des petits nombres, la loi $\mathcal{B}(800, 0.02)$ peut être approximée par la loi $\text{Poiss}(\lambda)$ avec $\lambda = 800 \times 0.02 = 16$.

Exercice 3. On cherche la probabilité que la taille d'un homme de 25 dépasse 180 cm sachant qu'il mesure plus de 177 cm. Formellement, on définit la variable aléatoire X décrivant la taille de l'individu et on s'intéresse à

$$\Pr(X > 180 \mid X > 177) = \frac{\Pr(\{X > 180\} \cap \{X > 177\})}{\Pr(X > 177)} = \frac{\Pr(X > 180)}{\Pr(X > 177)}.$$

(i). On suppose que X suit une loi normale de moyenne 175 et de variance 36. On considère la variable aléatoire standardisée

$$Z = \frac{X - 175}{6}$$

et donc

$$\begin{aligned} \Pr(X > 180) &= \Pr\left(\frac{X - 175}{6} > \frac{180 - 175}{6}\right) \\ &= \Pr\left(Z > \frac{180 - 175}{6}\right) = 1 - \Pr\left(Z \leq \frac{180 - 175}{6}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.833) = 1 - 0.798 = 0.202 \end{aligned}$$

et de même,

$$\Pr(X > 177) = \Pr\left(\frac{X - 175}{6} > \frac{177 - 175}{6}\right) = \Pr(Z > 1/3) = 1 - \Phi(0.333) = 1 - 0.629 = 0.371.$$

Donc, sous l'hypothèse de la loi normale, $\Pr(X > 180 \mid X > 177) = 0.202/0.371 = 0.544$.

(ii). Ici on s'intéresse toujours à $\Pr(X > 180 \mid X > 177)$ mais cette fois en supposant que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/175$. on a donc

$$\Pr(X > 180) = 1 - \Pr(X \leq 180) = 1 - [1 - \exp(-180/175)] = 0.357,$$

et

$$\Pr(X > 177) = 1 - \Pr(X \leq 177) = 1 - [1 - \exp(-177/175)] = 0.364,$$

et enfin $\Pr(X > 180 \mid X > 177) = 0.357/0.364 = 0.980$.

- (iii). Dans cet échantillon, il y a 14 individus dont la taille dépasse 177cm et 6 dont la taille dépasse 180cm. Ainsi, l'estimation empirique de $\Pr(X > 180 | X > 177)$ est $6/14 = 0.428$. Cette valeur est plus proche du modèle normal que du modèle exponentiel, dont tend à confirmer celui-ci.

Exercice 4. Définissons la variable aléatoire T désignant le temps d'attente de Nicole. On sait que la loi de T sachant qu'elle a choisi le coiffeur A est $U(0, 30)$, et la loi de T sachant qu'elle a choisi le coiffeur B est $U(0, 20)$. Autrement dit, la densité de T sachant que Nicole a lancé 5 ou 6 est

$$f_A(x) = \begin{cases} 1/30 & \text{pour } x \in (0, 30), \\ 0 & \text{pour } x \notin (0, 30), \end{cases}$$

et la densité de T sachant que Nicole a lancé 1, 2, 3, ou 4 est

$$f_B(x) = \begin{cases} 1/20 & \text{pour } x \in (0, 20), \\ 0 & \text{pour } x \notin (0, 20). \end{cases}$$

Soit D le chiffre sur le dé.

(a)

$$\mathbb{P}(T > 25 | D = 5) = \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{30 - 25}{30} = 1/6.$$

(b) D'après le théorème des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T < 15) &= \mathbb{P}(T < 15 | D = 5 \text{ ou } D = 6) \cdot \mathbb{P}(D = 5 \text{ ou } D = 6) + \\ &+ \mathbb{P}(T < 15 | D = 1 \text{ ou } D = 2 \text{ ou } D = 3 \text{ ou } D = 4) \cdot \mathbb{P}(D = 1 \text{ ou } D = 2 \text{ ou } D = 3 \text{ ou } D = 4) = \\ &= \int_0^{15} \frac{1}{30} dx \cdot \frac{2}{6} + \int_0^{15} \frac{1}{20} dx \cdot \frac{4}{6} = \frac{15}{30} \cdot \frac{2}{6} + \frac{15}{20} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(c) D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(D = 4 | T \geq 15) = \frac{\mathbb{P}(T \geq 15 | D = 4) \cdot \mathbb{P}(D = 4)}{\mathbb{P}(T \geq 15)} = \frac{\int_{15}^{20} \frac{1}{20} dx \cdot \frac{1}{6}}{1 - \mathbb{P}(T < 15)} = \frac{\frac{5}{20} \cdot \frac{1}{6}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{8}.$$

Exercice 5. Du fait que la fonction logarithmique est strictement croissante, on peut écrire pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(\log X \leq y) = \Pr(X \leq \exp(y)) = F_X\{\exp(y)\}.$$

Comme $\exp(y) > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$F_X\{\exp(y)\} = 1 - \exp\{-\exp(y)\}.$$

Donc la fonction de densité est

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \exp\{y - \exp(y)\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$