

Ex. 4.1 Solution guidée sur transparents

$$\begin{aligned} \text{Ex. 4.2} \quad E[Y] &= E[X^2] = \sum_{i=1}^3 x_i^2 P(X=x_i) = (-1)^2 \times 0.2 + 0^2 \times 0.5 + 1^2 \times 0.3 \\ &= 0.2 + 0 + 0.3 = \underline{0.5} \end{aligned}$$

Ex. 4.2 Solution guidée sur transparentsEx. 4.3 1. Soit $X = \#$ erreurs sur la page 272. $X \sim \text{Pois}(\lambda = \frac{1}{2})$ selon les infos du problème3. $P(X \geq 1)$

$$\begin{aligned} 4. &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - \frac{e^{-1/2} (1/2)^0}{0!} \end{aligned}$$

[prob. év. complémentaire]

[loi Poisson]

$$= \underline{1 - e^{-1/2}} \quad [\approx 0.393]$$

[simplification]

Ex. 4.5 1. Soit $X = \#$ particules α émises en 1 seconde par 1 gramme de matière radioactive2. $X \sim \text{Pois}(\lambda = 3.2)$ [raisonnement aux transparents]3. $P(X \leq 2)$ 4. $= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$ [l'union év., M.E.]

$$= e^{-3.2} + 3.2 e^{-3.2} + \frac{(3.2)^2}{2} e^{-3.2} \quad [\text{loi Poisson}]$$

$$= \left[1 + 3.2 + \frac{(3.2)^2}{2} \right] e^{-3.2} = \underline{9.32 e^{-3.2}} \quad [\approx 0.38] \quad [\text{simp.}]$$

Espérance: Calcul

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= \underline{\lambda} \end{aligned}$$

déf. espérance

$$\text{factorisation } (\lambda); \frac{i}{i!} = \frac{\lambda}{\lambda(i-1)!} = \frac{1}{(i-1)!}$$

(en posant $j = i-1$)

$$\left(\text{puisque } \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda} \right)$$

Variance: Calcul

$$\begin{aligned} \bullet E[X^2] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2 e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i e^{-\lambda} \lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1) e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \\ &= \lambda \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \right] \\ &= \lambda(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Théorème espérance fn. VA

factorisation λ ; $\frac{i^2}{i!} = \frac{i}{(i-1)!}$

(en posant $j = i-1$)

distributivité

[substitution $E(X)$, $\sum_i p(i) = 1$]

Variance: Formule Alternative

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \underline{\underline{\lambda}} \end{aligned}$$

Ex. 4.6 1. Soit $X = \#$ mutants

2. $X \sim \text{Pois}(\lambda=9)$ (selon le problème)

3, 4: a) $P(X=0) = \frac{e^{-9}}{0!} (\approx 0.00012)$

b) $P(X=3) = \frac{e^{-9} 9^3}{3!} (\approx 0.015)$

c) $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) - P(X=5)$
 $= 1 - e^{-9} \left(1 + 9 + \frac{81}{2} + \frac{729}{6} + \frac{6561}{24} + \frac{59049}{120} \right) = 1 - 9.3745 e^{-9} (\approx 0.884)$

Ex. 4.7 a) Soit $Y = \#$ tests sans mutants

Modèle binomial: - nombre fixe ($n=5$)

- épreuves de Bernoulli (sans/avec mutants)

- épreuves indépendantes

- p (sans) = même ($p=0.00012$) pour chaque test

b) $\Rightarrow Y \sim \text{Bin}(n=5, p=0.00012)$

c) 1. Soit $Z = \#$ tests avec au moins 1 mutant (complément: sans mutants)

2. $Z \sim \text{Bin}(n=5, p=1-0.00012)$ [même raisonnement que Y]

3. $P(Z=2)$

4. $= \binom{5}{2} (1-0.00012)^2 (0.00012)^3 \approx 1.72 \times 10^{-11}$ (très petite!!)

Loi géométrique

• Quelle distribution? Binomiale (n, p)

Ex. 4.8 a) $X \sim \text{Geom}(p=\frac{1}{6}) \Rightarrow E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/6} = 6$; $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-1/6}{(1/6)^2} = \frac{5/6}{1/36} = 30$

b) $X \sim \text{Bin Nég}(r=4, p=\frac{1}{6}) \Rightarrow E[X] = \frac{r}{p} = \frac{4}{1/6} = 24$; $\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{4(1-1/6)}{(1/6)^2} = 120$

$$\begin{aligned}
 P(X > 3) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) \\
 &= 1 - e^{-9} (9^0/0! + 9^1/1! + 9^2/2! + 9^3/3!) \\
 &= 1 - e^{-9} (1 + 9 + 81/2 + 729/6) = \underline{\underline{1 - 172e^{-9}}} \quad (\approx \underline{\underline{0.979}})
 \end{aligned}$$

$$1 - 0.00012 = \underline{\underline{0.99988}}$$

IMPORTANT
 You must scan this alignment page for best print quality.
 STEP 1: Put the ID Place this alignment page face down on the right
 front corner of page. Close the lid.
 STEP 2: Press OK

