

(Ex. 2.9: $P(\text{somme} = 8) = \frac{5}{36}$, $P(\text{somme} = 8 | \text{rer} = 3) = \frac{1}{6} = \frac{6}{36} \neq \frac{5}{36}$)

Ex. 2.1 • Écrire toutes les informations du problème:

Soient D = daltonien/ne, H = homme, F = femme

Mot clé: 'des' $P(D|H) = 0.05$ $P(D|F) = 0.0025$



Hommes Femmes ← Partition

a) $P(H) = 0.5$ $P(F) [= P(H^c)] = 0.5$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \text{ et } H) + P(D \text{ et } F) && [\text{loi probs. totales}] \\ &= P(D|H)P(H) + P(D|F)P(F) && [\text{dén. prob. cond.}] \\ &= 0.05 \times 0.5 + 0.0025 \times 0.5 && [\text{substitution}] \\ &= \underline{\underline{0.026}} && [\text{simplification}] \end{aligned}$$

b) $= 0.05 \times \frac{2}{3} + 0.0025 \times \frac{1}{3} = \underline{\underline{0.034}}$ [subst., simp.]

Conte: $P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D|H)P(H) + P(D|F)P(F)}$ [Formule de Bayes]

a) $= \frac{0.05 \times \frac{1}{2}}{0.05 \times \frac{1}{2} + 0.0025 \times \frac{1}{2}} = \frac{500}{525} = \frac{20}{21} (\approx 0.952)$

b) $= \frac{0.05 \times \frac{2}{3}}{0.05 \times \frac{2}{3} + 0.0025 \times \frac{1}{3}} = \frac{1000}{1025} = \frac{40}{41} (\approx 0.976)$

E: Somme = 8

F: 1er = 3

Ex. 2.1 a) Pour que E et F soient indépendants, il faut que:

$$P(E \text{ et } F) = P(E) \times P(F)$$

$$P(E) = \frac{5}{36}, \quad P(F) = \frac{1}{6} = \frac{6}{36} \quad (\text{Ex. 1.9})$$

$$P(E \text{ et } F) = \frac{1}{36} \Rightarrow P(E)P(F) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216} \neq \frac{1}{36} (= \frac{6}{36})$$

$\Rightarrow$ PAS indépendants ; donc E et F sont dépendants

b) E: Somme = 7

$$P(E \text{ et } F) = \frac{1}{36} \text{ (toujours)}, \quad P(F) = \frac{1}{6} \text{ (toujours)}$$

$$\text{Mais } P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(E)P(F) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P(E \text{ et } F) \Rightarrow \text{indépendants}$$

Interprétation intuitive: Sachant le résultat du premier dé, on n'a pas plus d'information au sujet de la probabilité que la somme soit 7.

Ex. 2.43 a) Soit X le nombre de 'succès' parmi les n premières épreuves

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \dots + P(X=n)$$

$$= 1 - P(X=0)$$

$$[P(A) = 1 - P(A^c)]$$

$$P(X=0) = P(\underbrace{E_1, E_2, \dots, E_n}_{\substack{\text{'échec'} \\ \uparrow}}) = \underbrace{(1-p) \times (1-p) \times \dots \times (1-p)}_{\substack{n \text{ fois}}} \quad [\text{épreuves indépendantes}]$$

$$\Rightarrow P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-p)^n$$

b) Considérons une séquence spécifique de n épreuves, chacune contenant exactement K succès (donc n-K échecs)

$$\text{p. ex. } \underbrace{S_1, S_2, \dots, S_K}_K \underbrace{E_{K+1}, E_{K+2}, \dots, E_n}_{n-K}$$

la probabilité de cette séquence $P(S_1, \dots, S_K, E_{K+1}, \dots, E_n)$

$$= \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{K \text{ fois}} \underbrace{(1-p)(1-p) \dots (1-p)}_{n-K \text{ fois}} \quad [\text{indép}] = p^K (1-p)^{n-K} \quad [\text{simp.}]$$

Puisque la multiplication est commutative, toute séquence possédant K succès et n-K échec a la probabilité $p^K (1-p)^{n-K}$.

Donc $P(K \text{ succès}) = \# \text{ séquences (ordonnées) avec K succès} \times P(\text{séquence})$

$\Rightarrow \# \text{ combinaisons de K succès parmi n épreuves} = \binom{n}{K}$

$$\Rightarrow P(X=K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

Ex. 3.4 • liste des séquences avec le nombre donné de succès

- Trouver la probabilité de chaque séquence
- Additionner les probabilités

- Pièce équilibrée $p(P) = \frac{1}{2}$ $p(F) = \frac{1}{2}$, indép.s.

0 Piles: F F F	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1 Pile: P F F, F P F, F F P	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ (chacune)	$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
2 Piles: P P F, P F P, F P P	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ (chacune)	$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
3 Piles: P P P	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
		$\Sigma = 1$

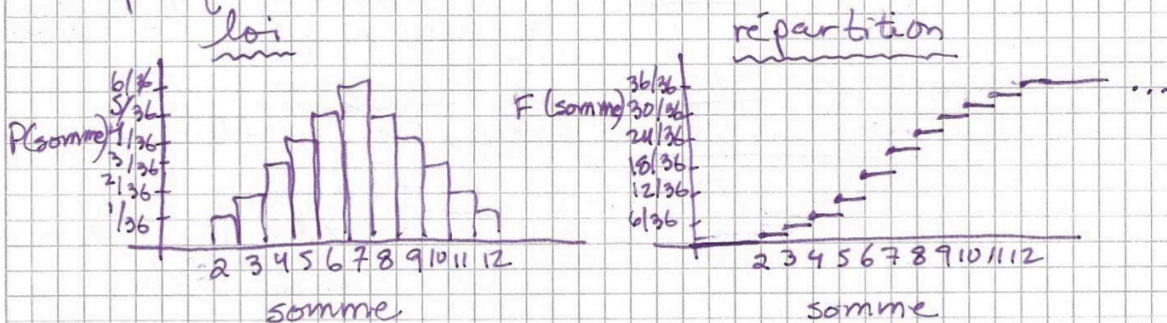
- Pièce biaisée $p(P) = \frac{1}{3}$ $p(F) = \frac{2}{3}$, indép.s.

0 Piles: F F F	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$
1 Pile: P F F, F P F, F F P	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$ (chacune)	$\frac{12}{27}$
2 Piles: P P F, P F P, F P P	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ (chacune)	$\frac{6}{27}$
3 Piles: P P P	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
		$\Sigma = 1$

$$P(\text{chaque séquence}) \times \# \text{ séquences} = P(\#P = k)$$

Ex. 3.5 (solution sur les transparents)

Graphiquement:



Ex. 3.6 1. Soit $X = \# \text{ piles}$

2. $X \sim \text{Bin}(n=6, p=1/2)$; Vérifier les 4 conditions:

- (i) nombre fixe ($n=6$)
- (ii) épreuves de Bernoulli (2 possibilités: pile/face pour chaque épreuve)
- (iii) épreuves indépendantes (donné dans l'information)
- (iv) même probabilité de succès (ici, pile) pour chaque épreuve ($p=1/2$)

3. $P(X \geq 4)$

4. $= P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$ [événements mutuellement exclusifs]

$$= \binom{6}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

[loi binomiale]

$$= \left[\frac{6!}{4!2!} + \frac{6!}{5!1!} + \frac{6!}{6!0!} \right] \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left[\frac{6 \times 5}{2} + 6 + 1 \right] \left(\frac{1}{64}\right) = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$