

GC – PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

CORRIGÉS EXAMEN BLANC 3

Exercice 1 (a) Les lettres sont distinctes, il y a donc $6! = 720$ arrangements différents.

(b) Tout d'abord, choisissez les 4 lettres : il y a $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!}$ façons de le faire. Le nombre d'arrangements différents des 4 lettres est $4!$. Donc, d'après le principe fondamentale de dénombrement, il y a $\binom{6}{4} \times 4! = \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = \boxed{360 \text{ possibilités}}$

(c) Les hommes feront dans la majorité s'il y aura 3 ou 4 ou 5 hommes dans l'équipe. Par le principe fondamentale de dénombrement et en comptant le nombre de combinaisons (l'ordre n'a pas d'importance ici), le nombre de façons de choisir i hommes parmi les 12 ET j femmes des 8 est $\binom{12}{i} \times \binom{8}{j}$. Ainsi, nous avons :

$$\binom{12}{3} \times \binom{8}{2} + \binom{12}{4} \times \binom{8}{1} + \binom{12}{5} \times \binom{8}{0} = 220 \cdot 28 + 495 \cdot 8 + 792 \cdot 1 = \boxed{10912}$$

Exercice 2 (a) 1. Soit X = le nombre de passagers qui n'apparaît pas pour le vol

2. $X \sim \text{Bin}(n = 200, p = 0.01)$ [+ vérifier les 4 conditions, voir au-dessous]

Pour une VA binomiale avec n large, p petit et np modérée, la distribution de X est approximativement $\text{Pois}(\lambda = np = 2)$

3, 4. $P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \approx 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = \boxed{1 - 3e^{-2}}$

On suppose qu'on a un [i] **nombre fixe** ($n=200$) de passagers [ii] **arrive (ou non)** au vol [iii] **indépendamment**, chacun avec la [iv] **même probabilité** ($p = 0.01$) de ne pas arriver ; aussi, on suppose que l'approximation de Poisson s'applique (VA binomiale avec n large, p petite et np modérée).

(b) (i) Soit C l'événement que le patient a cancer, et $+$ l'événement que le test est positif pour cancer. Alors, selon les informations du problème :

test détecte cancer correctement 90% des tests : $P(+ | C) = 0.9$;

test détecte pas de cancer correctement 99.9% des tests : $P(\text{pas } + | \text{pas } C) = 0.999$

$$\Rightarrow P(+ | \text{pas } C) = 1 - 0.999 = 0.001 ;$$

$$P(C) = 0.0001.$$

Grâce à la Formule de Bayes, on a :

$$\begin{aligned} P(C | +) &= \frac{P(+ | C) P(C)}{P(+)} = \frac{P(+ | C) P(C)}{P(+ | C) P(C) + P(+ | \text{not } C) P(\text{not } C)} \\ &= \frac{(0.9)(0.0001)}{(0.9)(0.0001) + (0.001)(0.999)} = \frac{0.00009}{0.00009 + 0.000999} = \frac{0.00009}{0.001089} \approx \underline{0.083} \end{aligned}$$

(Arrondissement du dénominateur permis, par exemple à la valeur 0.001, alors le résultat final serait 0.09 au lieu de 0.083).

(ii) Le résultat de la partie (a) implique que seulement 8 – 9% des patients qui ont un résultat positif pour ce test en fait sont atteints du cancer du rein, **qui n'est pas très bon**. Dans une population dont la maladie est rare, le nombre de faux positifs sera plus grand que le nombre de vrai positifs, donc le dépistage n'est pas conseillé. Cependant, s'il existe des facteurs qui augmentent le risque (par exemple, un facteur de risque génétique), c'est le cas qu'il est logique de tester ces individus.

Exercice 3 (a) $\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{4-2x} c(4-2x-y) dy dx = 1;$

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{4-2x} (4-2x-y) dy dx &= \int_{x=0}^2 \left[(4-2x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{4-2x} dx = \int_{x=0}^2 \left((4-2x)^2 - \frac{(4-2x)^2}{2} \right) dx \\ &= \int_{x=0}^2 \frac{(4-2x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^2 (16 - 16x + 4x^2) dx = \frac{1}{2} \left[16x - \frac{16x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} \right]_{x=0}^2 = \frac{16}{3} \\ &\Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{16}} \end{aligned}$$

(b) La densité conjointe ne se factorise pas en fonctions séparées de X et Y
 $(f(x, y) \neq g(x) \cdot h(y))$, donc par le **Théorème de Factorisation**, X et Y ne sont PAS indépendantes.

(c) $\underline{f_X(x)} = \int_{y=0}^{4-2x} \frac{3}{16} (4-2x-y) dy = \frac{3}{16} \frac{(4-2x)^2}{2}$ (de la partie (a))

$$= \boxed{\frac{3}{32} (4-2x)^2, \quad 0 < x < 2 \quad (= 0 \text{ sinon})}$$

(d) $\underline{E[X]} = \int_{x=0}^2 x f_X(x) dx = \int_{x=0}^2 x \frac{3}{32} \frac{(4-2x)^2}{2} = \frac{3}{32} \int_{x=0}^2 (16x - 16x^2 + 4x^3) dx$

$$= \frac{3}{32} [8x^2 - 16x^3/3 + x^4]_{x=0}^2 = 9/2 - 4 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(e) $f_{Y|X}(Y | X = x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{2(4-2x-y)}{(4-2x)^2}$

$$= \boxed{\frac{(4-2x-y)}{2(2-x)^2}, \quad x > 0, y > 0, 2x + y < 4 \quad (= 0 \text{ sinon})}$$

(f) $P(Y \geq 2 | X = 1/2) = \int_{y=2}^{4-2(1/2)} \frac{(4-2(1/2)-y)}{2(2-(1/2))^2} = \int_{y=2}^3 \frac{(3-y)}{(9/2)} = \frac{2}{9} \left[3y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=2}^3$

$$= \frac{2}{9} \left[9 - \frac{9}{2} - (6 - 2) \right] = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

Exercice 4 (a)
$$\underline{L(\theta)} = \prod_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-x_i/\theta}}{2\theta^3} = \frac{e^{-\sum x_i/\theta}}{2^n \theta^{3n}} \prod_{i=1}^n x_i \quad \boxed{\propto \frac{e^{-\sum x_i/\theta}}{\theta^{3n}} \left[= \frac{e^{-n\bar{x}/\theta}}{\theta^{3n}} \right]}$$

(b) $\ell(\theta) = -n\bar{x}/\theta - 3n \log \theta \implies \ell'(\theta) = \frac{n\bar{x}}{\theta^2} - \frac{3n}{\theta} = 0 \implies \bar{x} - 3\theta = 0 \implies \boxed{\hat{\theta}_{EMV} = \frac{\bar{x}}{3}}$

Vérifier max : $\ell'(\theta) > 0$ quand $\bar{x}/3 > \theta$; $= 0$ quand $\theta = \bar{x}/3$, et < 0 quand $\bar{x}/3 < \theta$. Donc, en passant du gauche au droit, la dérivée passe d'une valeur positive à une valeur négative, c.-à-d. $\bar{x}/3$ est vraiment un maximum. (le test de la 2^{me} dérivée n'aide pas beaucoup ici).

(c) $J(\theta) = -\ell''(\theta) = \boxed{-\frac{(3n\theta - 2n\bar{x})}{\theta^3}} \quad \left[\text{ou } \frac{n}{\theta^3} (2\bar{x} - 3\theta) \right]$

(d) Non biaisé si le biais $b(\hat{\theta}_{EMV}) = E[\hat{\theta}_{EMV}] - \theta = 0$;

$$E[\hat{\theta}_{EMV}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{3n}\right] = \frac{n}{3n} E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{3} \int_0^\infty x \frac{x^2 e^{-x/\theta}}{2\theta^3} dx = \frac{1}{3} 3\theta = \theta \Rightarrow \underline{\text{oui, non biaisé.}}$$

(e) IC asymptotique : $\hat{\theta}_{EMV} \pm z/\sqrt{J(\hat{\theta}_{EMV})}$; pour un IC de 87.5%, la z -valeur a probabilité $0.875 + (1-0.875)/2 = 0.9375$ à gauche. La probabilité la plus proche dans la table normale est 0.9370, qui correspond à la valeur $z = 1.53$.

$$\bar{x} = \frac{5+6+13+16+5+7+9+4+7}{9} = 8 \implies \hat{\theta}_{EMV} = \frac{8}{3};$$

$$J(\hat{\theta}_{EMV}) = \frac{9}{(8/3)^3} (2(8) - 3(8/3)) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 3^3}{(8^3)} = \frac{243}{64} \implies \sqrt{J(\hat{\theta}_{EMV})} \approx 15.6/8 = 1.95 (\approx 2)$$

$$\implies \text{IC : } \boxed{\frac{8}{3} \pm 1.53/1.95} \quad \left(\text{ou } \frac{8}{3} \pm 1.53/2 \right)$$