

GC – PROBABILITÉS ET STATISTIQUE – EXAMEN BLANC 2

- Exercice 1**
- (a) De combien de manières peut-on asseoir en rang 3 garçons et 3 filles ?
 - (b) De combien de manières peuvent les garçons restent ensemble et les filles aussi ?
 - (c) De combien de manières peuvent les garçons restent ensemble ?

Exercice 2 Le nombre d'accidents touchant un individu lors d'une année est une variable aléatoire de Poisson d'espérance λ . Supposons que cette espérance varie en fonction des personnes, valant ainsi 2 pour 60% de la population et 3 pour les 40% restants. On choisit une personne au hasard de cette population.

- (a) Quelle est la probabilité qu'au cours d'une année, elle n'ait aucun accident ?
- (b) Quelle est la probabilité qu'au cours d'une année, elle ait 3 accidents ?
- (c) Quelle est la probabilité conditionnelle qu'elle ait 3 accidents pendant cette année sachant qu'elle n'a pas eu d'accident l'année précédente ?

Exercice 3 La densité conjoint de X et Y est donnée par :

$$f(x, y) = cxy(1 - x) \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \quad f(x, y) = 0 \text{ sinon.}$$

- (a) Trouver c .
- (b) X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.
- (c) Trouver $f_X(x)$, la densité marginale de X .
- (d) Trouver $E[X]$.
- (e) Trouver $Var(X)$.
- (f) Trouver $f_{X|Y}(x | Y = y)$, la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.

Exercice 4 Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même densité (pdf)

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right), x > 0.$$

Trouver :

- (a) $L(\sigma)$ (fonction de vraisemblance) ;
- (b) $\ell(\sigma)$ (log de la vraisemblance)
- (c) $\hat{\sigma}_{EMV}$ (estimateur de maximum de vraisemblance) ;
- (d) $J(\sigma)$ (information observée).
- (e) Supposons que nous observons les données $x_1, \dots, x_4 : 1.23, 3.32, 1.88, 1.57$. Donner un interval de confiance approximatif de 95% pour σ .