

GC – PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

CORRIGÉS EXAMEN BLANC 2

Exercice 1 (a) 3 garçons + 3 filles = 6 personnes $\implies 6! =$ 720 arrangements

(b) Les configurations avec les 3 garçons ensemble et les 3 filles ensemble sont soit GGGBBB, soit BBBGGG. Pour chacun d'eux, il y a $3!$ arrangements pour les 3 garçons et pour chacune de ces arrangements il y a $3!$ arrangements pour les 3 filles, donc selon le **principe fondamentale de dénombrement**, le nombre total de configurations satisfaisant la condition est $3! \times 3! \times 2 =$ 72 arrangements

(c) Les configurations satisfaisant la condition ressemblent à BBBGGG, GBBBGG, GGBBBG et GGGBBB, il y a donc 4 positions possibles pour le premier garçon. Encore une fois, pour chacune des 4 positions il y a $3!$ arrangements possibles pour les garçons et pour chacune de ces arrangements il y a $3!$ arrangements pour les 3 filles, donc par le **principe fondamentale de dénombrement**, le nombre total de configurations satisfaisant la condition est $3! \times 3! \times 4 =$ 144 arrangements

Exercice 2 (a) Selon la **loi de probabilité totale** et en utilisant la **loi de Poisson**,

$$P(0 \text{ accidents}) = P(0 \mid \lambda = 2)P(\lambda = 2) + P(0 \mid \lambda = 3)P(\lambda = 3) = \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">}0.6e^{-2} + 0.4e^{-3}\text{}$$

(b) Selon la **loi de probabilité totale** et en utilisant la **loi de Poisson**,

$$P(3 \text{ accidents}) = P(3 \mid \lambda = 2)P(\lambda = 2) + P(3 \mid \lambda = 3)P(\lambda = 3) = \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">}0.6e^{-2}\frac{2^3}{3!} + 0.4e^{-3}\frac{3^3}{3!}\text{}$$

(c) Selon la **définition de la probabilité conditionnelle**, la **loi de probabilité totale**, et en supposant **l'indépendance conditionnelles des années (sachant λ)**, on a

$$\begin{aligned} P(3 \mid 0) &= \frac{P(3 \text{ cette année ET } 0 \text{ l'année passée})}{P(0 \text{ l'année passée})} = \frac{P(3, 0 \mid \lambda = 2)P(\lambda = 2) + P(3, 0 \mid \lambda = 3)P(\lambda = 3)}{P(0)} \\ &= \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">}\frac{0.6e^{-2}e^{-2} \left(\frac{2^3}{3!}\right) + 0.4e^{-3}e^{-3} \left(\frac{3^3}{3!}\right)}{0.6e^{-2} + 0.4e^{-3}}\text{ } \end{aligned}$$

Exercice 3 (a) $\int \int f(x, y) dx dy = 1 \implies \int_0^1 \int_0^1 cxy(1-x) dx dy = 1$

$$\implies c \int_0^1 [x(1-x)] \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^1 dx = 1 \implies \frac{c}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_{x=0}^1 = 1 \implies \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{6} = 1$$

$$\implies \frac{c}{12} = 1 \implies \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">}c = 12\text{}$$

(b) OUI : soit $g(x) = x(1-x) \cdot I(0 \leq x \leq 1)$ et $h(y) = y \cdot I(0 \leq y \leq 1)$. Alors $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, donc par le **Théorème de Factorisation**, X et Y SONT indépendantes.

(c) La densité marginale de X est $f(x) = \int_0^1 12x(1-x)y \, dy = 12x(1-x) \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^1$

$$= \boxed{6x(1-x), \ 0 \leq x \leq 1 \text{ (= 0 sinon)}}$$

(d) $\underline{E[X]} = \int_0^1 x \cdot f_X(x) \, dx = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x) \, dx = \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{6x^4}{4} \right] \Big|_{x=0}^1 = \frac{6}{12} = \boxed{\frac{1}{2}}$

(e) Utiliser la Formule Alternative pour la variance : $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$;

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x) \, dx = \left[\frac{6x^4}{4} - \frac{6x^5}{5} \right] \Big|_{x=0}^1 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

$$\text{Donc } \underline{Var(X)} = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6-5}{20} = \boxed{\frac{1}{20}}$$

(f) $f_{Y|X}(y \mid X=x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{12x(1-x)y}{6x(1-x)} = \boxed{2y, \ 0 \leq y \leq 1, \text{ (=0 sinon)}}$

Également, on pourrait simplement trouver $f_Y(x)$, la densité marginale de Y , car les VAs X et Y sont *indépendantes*. Donc, la valeur de X ne donne pas d'information sur la densité de Y . [Et on voit que la densité conditionnelle ne dépend QUE de Y et pas de X .]

Exercice 4 (a) vraisemblance $L(\sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} e^{-X_i/\sigma} = \boxed{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^n e^{-\sum X_i/\sigma}}$

(b) $\ell(\sigma) = \log L(\sigma) = \boxed{-n \log \sigma - \sum_{i=1}^n X_i/\sigma}$

(c) $\ell'(\sigma) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sigma^2} = 0 \implies \sum_{i=1}^n X_i = n\sigma \implies \boxed{\hat{\sigma}_{EMV} = \sum_{i=1}^n X_i/n = \bar{X}}$

Vérifier maximum :

$\ell' > 0$ quand $\sigma < \bar{X}$; $= 0$ quand $\sigma = \bar{X}$; < 0 quand $\sigma > \bar{X}$, donc en passant du gauche à droit, la dérivée passe d'une valeur positive à une valeur négative, c.-à-d., \bar{X} est vraiment un maximum. (le test de la 2^{ème} dérivée n'aide pas beaucoup ici).

(d) La variance asymptotique est $J^{-1}(\sigma) = -1/\ell''(\sigma) = 1 / \left[\frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\sigma^3} - \frac{n}{\sigma^2} \right]$

$$= \boxed{\frac{\sigma^3}{2 \sum_{i=1}^n X_i - n\sigma} \left[\text{ ou } \frac{\sigma^3}{n(2\bar{X} - \sigma)} \right]}$$

(e) 95% IC : $\hat{\sigma}_{EMV} \pm (1.96 \text{ or } 2) J^{-1/2}(\hat{\sigma}_{EMV})$; $n=4$; $\sum_{i=1}^n X_i = 8 \rightarrow \hat{\sigma}_{EMV} = \bar{X} = 2$

$$J(\hat{\sigma}_{EMV}) = \frac{2^3}{4(2 \cdot 2 - 2)} \implies J^{-1/2}(\hat{\sigma}_{EMV}) = 1 \implies \boxed{2 \pm 2 \text{ [ou (0, 4)]}}$$