

Exercice 1 (a) Un étudiant a une liste de lectures d'été de huit livres. L'étudiant doit lire cinq parmi ces livres avant la fin de l'été. De combien de manières l'élève peut-il lire cinq des huit livres ?

(b) De combien de manières différentes 4 pièces de 5 francs, 3 pièces de 2 francs et 2 pièces de 1 franc peuvent-elles être rangées à la suite ?

(c) Dans une cour de récréation, 3 sœurs et 8 autres filles jouent ensemble. Dans un jeu particulier, de combien de façons toutes les filles peuvent-elles être assises dans un ordre circulaire afin que toutes les trois sœurs ne soient pas assises ensemble ?

Exercice 2 Quand une machine fonctionne bien, 50% des objets fabriqués sont de bonne qualité et l'autre 50% sont de qualité médiocre. Pourtant, il y a une chance de 10% que la machine ne fonctionne pas bien ; dans ce cas, seulement 25% des objets sont de bonne qualité et 75% sont de qualité médiocre.

(a) Quelle est la probabilité qu'un objet tiré au hasard soit de bonne qualité ?

(b) Un objet tiré au hasard est de bonne qualité. Quelle est la probabilité que la machine fonctionne bien ?

(c) On a tiré 5 objets au hasard ; 4 sont de bonne qualité et 1 est de qualité médiocre. Quelle est la probabilité que la machine fonctionne bien ?

Exercice 3 La fonction de densité conjointe de X et Y est donnée par :

$$f(x, y) = c(x + y^2) \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \quad f(x, y) = 0 \text{ sinon.}$$

(a) Trouver c .

(b) Trouver les densités marginales de X et de Y .

(c) X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.

(d) Trouver $E[X]$ et $Var(X)$.

Exercice 4 Soient X_1, \dots, X_n indépendantes avec la densité ($\theta > 0$)

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1; \quad = 0 \text{ sinon.}$$

Trouver :

(a) $L(\theta)$ (fonction de vraisemblance) ;

(b) $\hat{\theta}_{EMV}$ (estimateur de maximum de vraisemblance) ;

(c) $J(\theta)$ (information observée).

(d) Est-ce que $\hat{\theta}_{EMV}$ est biaisé ?

(e) On a les données suivants ($n = 9$) : $e^{-1}, e^{-2}, e^{-4}, e^{-2}, e^{-1}, e^{-3}, e^{-3}, e^{-1}, e^{-1}$.

Donner un intervalle de confiance approximatif (asymptotique) à 95% pour θ .