

# GC – PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

## CORRIGÉS EXAMEN BLANC 1

---

**Exercice 1** (a) L'ordre des livres n'est pas important, seulement quels livres sont lus. Il s'agit donc d'une combinaison de huit livres parmi cinq :

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \times (8-5)!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{56}$$

(b) En supposant que toutes les pièces de 5-franc sont similaires, toutes les pièces de 2-franc sont similaires, et toutes les pièces de 1-franc sont similaires, nous comptons le nombre de permutations avec éléments similaires :

$$\frac{9!}{4! \times 3! \times 2!} = \boxed{1260}$$

(c) Il y a 3 sœurs et 8 autres filles, pour un total de 11 filles. Le nombre d'arrangements de ces 11 filles d'une manière circulaire =  $(11 - 1)! = 10!$ . Pour voir cela, on fixe la place de la première personne. Alors, il y en a  $10!$  arrangements pour les 10 personnes restantes. Puisque les gens forment un cercle, le nombre de d'arrangements possibles ne dépendent pas de la place de la première personne.

Maintenant, les trois sœurs peuvent s'arranger en  $3!$  façons. Par le principe fondamental de dénombrement, le nombre de façons pour que 3 sœurs se réunissent toujours dans l'arrangement =  $8! \times 3!$ .

Par conséquent, le nombre de façons dont l'arrangement peut avoir lieu si les 3 sœurs ne sont PAS toutes assises ensemble est :

$$10! - (8! \times 3!) = 3,628,800 - (40,320 \times 6) = 3,628,800 - 241,920 = \boxed{3,386,880}$$

**Exercice 2** (a) Soit  $H$  'haute qualité' et  $W$  'machine fonctionne'.

$$P(H) = P(H | W)P(W) + P(H | \text{pas } W)P(\text{pas } W) = \boxed{0.5 \times 0.9 + (1/4) \times 0.1}$$

$$(b) P(W | H) = \frac{P(H | W)P(W)}{P(H)} = \boxed{\frac{0.5 \times 0.9}{0.5 \times 0.9 + (1/4) \times 0.1}}$$

(c) Soit  $M$  'qualité médiocre'. En conditionnant sur l'état de la machine est fonctionnant, le nombre d'objets de haute qualité suit une loi binomiale ( $n = 5, p = 0.5$ ) [+ vérifier les 4 conditions binomiales]. Alors, selon la Formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(W | 4H, 1M) &= \frac{P(4H, 1M | W)P(W)}{P(4H, 1M | W)P(W) + P(4H, 1M | \text{not } W)P(\text{not } W)} \\ &= \boxed{\frac{5(1/2)^5 \times 0.9}{5(1/2)^5 \times 0.9 + 5(1/4)^4(1 - 1/4) \times 0.1}} \end{aligned}$$

**Exercice 3** (a)  $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 f_{X,Y}(x,y) dy dx = 1 \implies \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (x+y^2) dy dx = 1/c;$

$$1/c = \int_{x=0}^1 \left[ xy + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^1 dx \Rightarrow \int_{x=0}^1 (x + 1/3) dx = x^2/2 + x/3 \Big|_{x=0}^1 = 5/6 \Rightarrow \boxed{c = 6/5}$$

(b)  $f_X(x) = \int_{y=0}^1 \frac{6}{5}(x+y^2) dy = \frac{6}{5} (xy + y^3/3) \Big|_{y=0}^1 = \boxed{\frac{6}{5} (x + 1/3), 0 \leq x \leq 1 \text{ (= 0 sinon)}}$

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^1 \frac{6}{5}(x+y^2) dx = \frac{6}{5} (x^2/2 + xy^2) \Big|_{x=0}^1 = \boxed{\frac{6}{5} (1/2 + y^2), 0 \leq y \leq 1 \text{ (= 0 sinon)}}$$

(c) Non, parce que la densité conjointe ne se factorise pas ( [Théorème de Factorisation](#) ) :

$$\underline{f_{X,Y}(x,y) = \frac{6}{5}(x+y^2)} \quad \boxed{\neq} \quad \underline{\frac{6}{5}(x+1/3) \cdot \frac{6}{5}(1/2+y^2) = f_X(x)f_Y(y)}.$$

(d)  $\underline{E[X]} = \int_{x=0}^1 x f_X(x) dx = \int_{x=0}^1 \frac{6}{5}(x^2 + x/3) dx = \frac{6}{5}(x^3/3 + x^2/6) \Big|_{x=0}^1 = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}.$

$$\underline{E[X^2]} = \int_{x=0}^1 x^2 f_X(x) dx = \int_{x=0}^1 \frac{6}{5}(x^3 + x^2/3) dx = \frac{6}{5}(x^4/4 + x^3/9) \Big|_{x=0}^1 = \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) = \underline{\underline{\frac{13}{30}}}.$$

En utilisant la Formule Alternative :  $\implies Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{13}{30} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \boxed{\underline{\underline{\frac{11}{150}}}}$

(e)  $f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{6}{5}(x+y^2)}{\frac{6}{5}(1/2+y^2)} = \boxed{\frac{(x+y^2)}{1/2+y^2}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \text{ = 0 sinon}}$

(f)  $P(X < \frac{1}{2} | Y = \frac{1}{2}) = \int_{x=0}^{1/2} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(1/2)} dx = \int_{x=0}^{1/2} \frac{x + (\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2} dx = \frac{4}{3} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right) \Big|_{x=0}^{1/2}$   
 $= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{3}}$

**Exercice 4** (a)  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1} = \boxed{\theta^n \left( \prod_{i=1}^n X_i \right)^{\theta-1}}$

(b)  $\hat{\theta}_{EMV} : \ell = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log X_i; \frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log X_i = 0 \implies \frac{n}{\theta} = - \sum_{i=1}^n \log X_i$

$$\implies \boxed{\hat{\theta}_{EMV} = - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i}}$$

Vérifier max :

$$\frac{d^2 \ell(\theta)}{d\theta^2} = \frac{d\ell(\theta)}{d\theta} \left[ \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log X_i \right] = -\frac{n}{\theta^2} < 0, \text{ car } n > 0, \theta > 0, \text{ donc } \frac{n}{\theta^2} > 0 \implies -\frac{n}{\theta^2} < 0,$$

alors l'extremum ( $\hat{\theta}_{EMV}$ ) est un maximum.

$$(c) J(\theta) = \frac{-d^2 \ell(\theta)}{d\theta^2} = \boxed{\frac{n}{\theta^2}} \quad (\text{d'après la vérification de maximum, partie (b)})$$

(d) [À noter : le problème n'exige pas une évaluation du biais.]

On sait qu'asymptotiquement l'EMV est non biaisé, mais si la taille de l'échantillon est finie (petite), il faut vérifier si l'EMV est biaisé ou pas.

$$b(\hat{\theta}_{EMV}) = E[\hat{\theta}_{EMV}] - \theta; E[\hat{\theta}_{EMV}] = E \left[ -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i} \right].$$

Considérons le cas  $n = 1$  ; si  $\hat{\theta}_{EMV}$  est non biaisé, alors on a que  $E \left[ \frac{1}{\log X} \right] = \int_0^1 \frac{\theta x^{\theta-1}}{\log x} dx = \theta$ ,

et donc il nous reste à vérifier si  $\int_0^1 \frac{x^{\theta-1}}{\log x} dx = 1$ .

Cette intégrale est difficile à évaluer directement, mais est suffisamment compliqué qu'on peut dire que ce n'est pas le cas qu'elle égale à 1. Donc oui,  $\hat{\theta}_{EMV}$  est biaisé.

(e) En supposant que  $n = 9$  est 'suffisamment grande', un IC approximatif à 95% pour  $\theta$  est (ok si 2 au lieu de 1.96) :  $\hat{\theta}_{EMV} \pm 1.96/\sqrt{J(\hat{\theta}_{EMV})}$

$$\implies \hat{\theta}_{EMV} \pm 1.96/\sqrt{\hat{\theta}^2/n} \implies -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i} \pm 1.96 \times \sqrt{n} / \left| \sum_{i=1}^n \log X_i \right|.$$

$$\sum_{i=1}^n \log X_i = \log e^{-1} + \log e^{-2} + \log e^{-4} + \log e^{-2} + \log e^{-1} + \log e^{-3} + \log e^{-3} + \log e^{-1} + \log e^{-1}$$

$$= (-1) + (-2) + (-4) + (-2) + (-1) + (-3) + (-3) + (-1) + (-1) = -18;$$

$$\text{alors l'IC est } 9/18 \pm 2 \times \sqrt{9}/18 \implies \boxed{1/2 \pm 1/3}$$