

GC – Probabilités et Statistique

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14271>

Cours 2

- Analyse combinatoire
- Introduction – théorie des probabilités

Analyse combinatoire

- Pour plusieurs situations, il est souhaitable de disposer d'une méthode efficace pour *dénombrer* les résultats possibles
- En fait, bien de problèmes en théorie des probabilités peuvent être résolus simplement *en comptant le nombre de manières différentes* selon lesquelles un certain *événement* peut se réaliser
- La théorie mathématique du dénombrement : **analyse combinatoire**

Principe fondamental de dénombrement (PFD)

- Supposons qu'il faille réaliser *deux* expériences
- Si *l'expérience 1* peut produire l'un quelconque de m résultats et si, *pour chacun d'entre eux*, il y a n résultats possibles pour *l'expérience 2*
- \Rightarrow Alors, il existe $m \times n$ résultats pour les deux expériences *prises ensemble*.

Exemple 2.1

jets de 2 dés :  

Solution :

Il existe _____ issues possibles pour le dé **bleu**

et _____ issues possibles pour le dé **rouge** et donc _____

pour les 2 expériences prises ensemble

Principe fondamental de dénombrement généralisé (PFDG)

- Si r expériences doivent être réalisées et sont telles que :
 - la première peut produire l'un quelconque de n_1 résultats,
 - si pour *chacun d'entre eux* il y a n_2 résultats possibles pour la deuxième expérience,
 - si pour *chaque résultat des deux premières expériences* il y a n_3 résultats possibles pour la troisième expérience,
 - et ainsi de suite . . .
- Il y aura alors *un total de* $n_1 \times n_2 \text{ times} \cdots \text{times } n_r$ résultats possibles pour les r expériences prises ensemble.

Exemples

Exemple 2.2a Combien de plaques portant un matricule de 7 caractères peut-on former si le premier caractère est un chiffre, puis 3 lettres, et les 3 derniers des chiffres ??

Exemple 2.2b Combien de plaques si l'on excluait que les lettres ou les chiffres se répètent ??

Permutations : arrangements ordonnés

- Un *arrangement ordonné* d'objets est appelé une **permutation**
- **Exemple** : Combien existe-t-il d'arrangements ordonnés des lettres a , b et c ?

1 *Énumération directe* : faire la liste de toutes les possibilités, puis compter

2 *Principe fondamental* :

- la première lettre de la permutation peut être n'importe laquelle des 3,
- la deuxième peut ensuite être choisie parmi les 2 restantes,
- tandis que la troisième ne peut plus faire l'objet d'aucun choix (c.-à-d. 1 'choix')

■ En utilisant le *principe fondamental généralisé*, on a que :

le nombre de permutations de n objets discernables est $n!$

(n **factorielle** = $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1$)

Exemple

Exemple 2.3a 8 matériaux seront classés en fonction de leur capacité à accomplir une tâche. En supposant que deux matériaux ne possèdent pas exactement la même capacité, combien de classements sont possibles ?

Exemple 2.3b 3 échantillons d'un des matériaux sont choisis parmi un groupe de 9 échantillons, puis sont placés dans 3 machines (M_1, M_2, M_3) afin de tester leur résistance à l'eau. De combien de façons peut cette affectation être fait ?

Permutations : objets partiellement indiscernables

Exemple 2.4 Combien *d'arrangements différents* peut-on former avec les letters $E R R E U R$?

Solution

- D'abord, comptons le nombre de permutations quand les 3 R et les 2 E *sont distincts* ($E_1 R_1 R_2 E_2 U R_3$) = _____
- Cependant, considérons l'une quelconque des permutations, p. ex. $E_1 R_1 E_2 R_2 U R_3$. Si nous permutions les R entre eux et les E entre eux, l'arrangement résultant serait toujours de la même forme, soit : $ERERUR$
 - Il existe combien de permutations des R et des E : _____
 - Donc, combien de permutations (le total) : = _____
- Le nombre de permutations de n objets, *parmi lesquels* n_1 *sont indiscernables* entre eux, n_2 *sont indiscernables* entre eux, ..., n_r *sont indiscernables* entre eux :

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

Combinaisons : sélection sans ordre

- Ensuite, déterminons le nombre de groupes de r objets qu'il est possible de former sans répétition à partir d'un total de n objets (quand *l'ordre des objets n'est pas significatif*)

Exemple 2.5 Combien de groupes de 3 batons peut-on construire en tirant parmi 5 souris (A, B, C, D, E)?

Solution On utilise le raisonnement suivant :

Puisqu'il y a _____ façons de choisir le premier batons, puis _____ de choisir ensuite le deuxième et finalement _____ de choisir le dernier, il y a donc _____ *en tenant compte de l'ordre dans lequel ces batons sont choisis.*

Cependant, un triplé donné, p. ex. le triplé constitué des batons A, B, D , apparaîtra _____ fois.

Donc, le nombre total de groupes pouvant être formés est _____

Coefficients binomiaux

- L'expression $\binom{n}{r}$ (r parmi n) pour $r \leq n$, est définie par :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Ce nombre s'appelle également le *coefficient binomial*
- Tout sous-ensemble de r objets choisis sans répétition dans un ensemble en contenant n est appelé **combinaison de r objets pris parmi n**
- Le nombre $\binom{n}{r}$ est le nombre de combinaisons de r objets pris parmi n si **l'ordre des objets est sans importance**

Exemples

Exemple 2.6 On veut former un comité comprenant 3 des 20 personnes d'un groupe. Combien y a-t-il de ces comités ??

Exemple 2.7a A partir d'un groupe de 5 femmes et de 7 hommes, combien de comités différents composés de 2 femmes et de 3 hommes peut-on former ??

Exemple 2.7b

Exemple 2.7b Qu'en est-il si 2 des hommes s'entendent mal et refusent de siéger simultanément au comité ??

Coefficients multinomiaux

- En utilisant *le principe fondamental généralisé*, on déduit que le nombre de répartitions possibles de n objets en r groupes distincts de tailles respectives n_1, n_2, \dots, n_r est :

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}.$$

- Ce nombre est appelé le **coefficient multinomial**

Exemple 2.8 Dans une étude comparative, 16 blocs de ciment doivent être affectés en 3 groupes de 12, 2 et 2 blocs.

De combien de façons peut-il être fait ??

PAUSE

Ensemble fondamental

- Considérons une 'expérience' dont l'issue n'est pas prévisible – p. ex., je lance un dé équilibré
- Bien que *l'issue de l'expérience* ne soit pas connue d'avance, admettons que *l'ensemble des issues possibles* est connu
- Cet ensemble des issues possibles de l'expérience est appelé **l'ensemble fondamental** de l'expérience, noté S (ou Ω dans quelques livres)
- L'ensemble fondamental pourrait être *discret* ou *continu*
- *Exemples :*
 - On lance 2 dés : _____
 - On lance 2 dés en considérant *la somme* : _____
 - On considère la durée de temps d'éclairage d'une ampoule : _____

Événements

- Tout sous-ensemble $E \subset S$ est appelé un **événement**
- p. ex. :   est un événement de l'ensemble fondamental S de l'issue de lancement de 2 dés
- Pour toute paire d'événements E et F , le nouvel événement $E \cup F$ (**l'union** de E et F) contient chaque élément se trouvant *dans E , dans F OU dans les deux à la fois*
- De même pour toute paire d'événements E et F , le nouvel événement $E \cap F$ (**l'intersection** de E et F) est défini comme l'ensemble des réalisations qui sont *à la fois dans E ET dans F*
 - Si $E \cap F = \emptyset$ (**l'événement vide**), alors E et F sont dits **mutuellement exclusifs (ME)**
- Le nouvel événement E^c , le **complément** de E , contient tous les éléments de S *qui ne sont pas dans E*

Diagramme de Venn – Union, Intersection

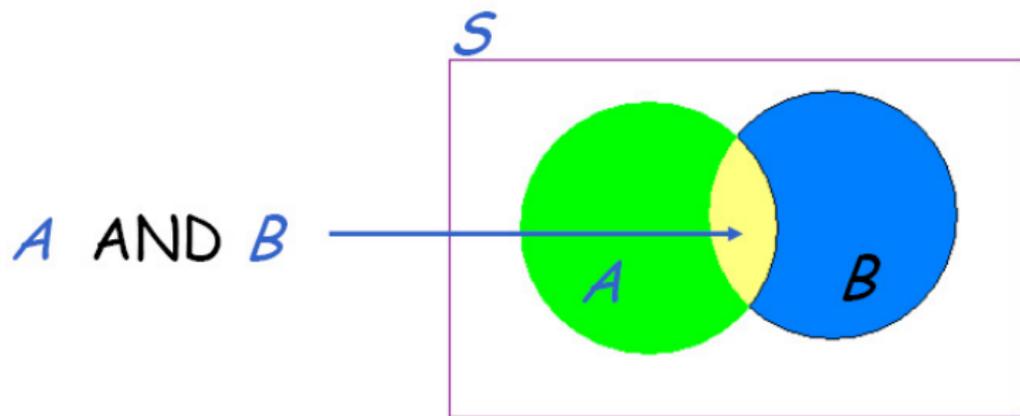
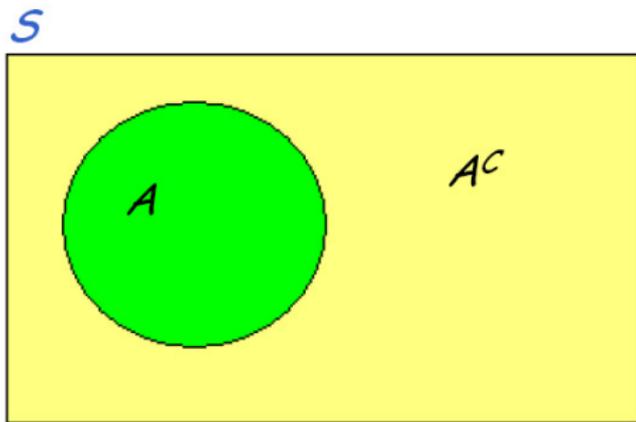


Diagramme de Venn – Complément



Règles utiles – 'l'algèbre' d'événements

(ne fait pas partie de l'examen)

- Commutativité :

- $E \cup F = F \cup E$

- $E \cap F = F \cap E$

- Associativité :

- $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$

- $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$

- Distributivité :

- $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$

- $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$

- Lois de DeMorgan :

- $(\bigcup_{i=1}^n E_i)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i^c$

- $(\bigcap_{i=1}^n E_i)^c = \bigcup_{i=1}^n E_i^c$

Théorie fréquentiste des probabilités

- Il existe plusieurs définitions de la *probabilité d'un événement*
- Nous utilisons celle de la *théorie fréquentiste des probabilités*
- On suppose qu'une expérience ayant ensemble fondamental S est exécutée plusieurs fois sous les mêmes conditions
- Pour chaque événement E de S , on définit $n(E)$ comme le **nombre de fois où l'événement E survient** lors des n premières répétitions de l'expérience
- Alors $P(E)$, *la probabilité de l'événement E* est définie par

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(E)}{n}$$

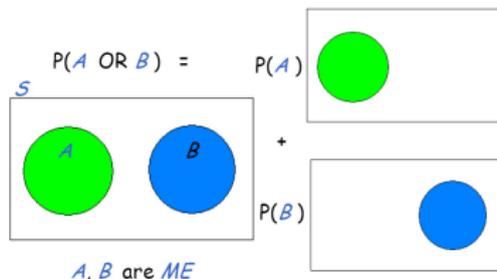
- La probabilité est donc la **fréquence limite** de l'occurrence de l'événement E

Axiomes de probabilité

Pour chaque événement E de S , nous admettons qu'un nombre $P(E)$ (appelé **la probabilité de l'événement E**) existe et satisfait aux trois *axiomes de probabilité* suivants :

Axiomes de probabilité

- 1 $0 \leq P(E) \leq 1$
- 2 $P(S) = 1$
- 3 Pour chaque séquence d'événements mutuellement exclusifs E_1, E_2, \dots , $P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$.



Quelques théorèmes élémentaires (mais utiles)

- 1 $P(E^c) = 1 - P(E)$
- 2 Si $E \subset F$, alors $P(E) \leq P(F)$
- 3 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

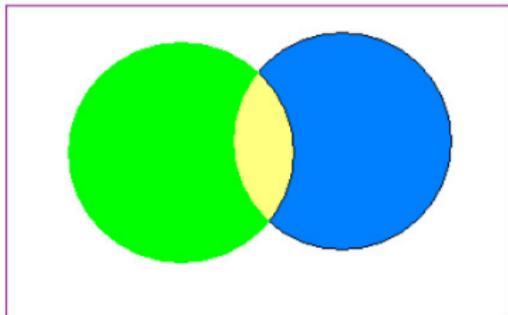
Théorème 'inclusion-exclusion' (général) :

(ne fait pas partie de l'examen)

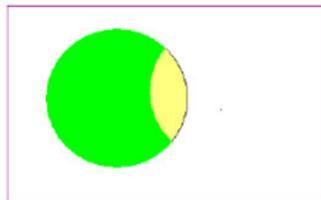
$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) &= \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) \\ &+ \sum_{i_1 < i_2 < i_3} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}) - \dots \\ &+ (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_r}) \\ &+ \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) \end{aligned}$$

Diagramme de Venn – Théorème 'inclusion-exclusion'

$$P(A \text{ OR } B) =$$

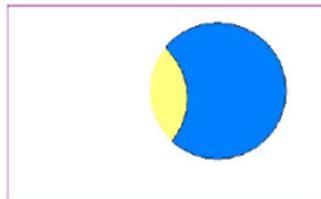


$$P(A)$$



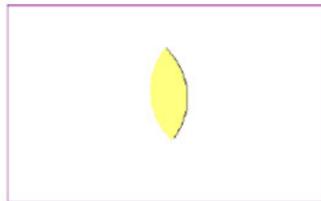
+

$$P(B)$$



-

$$P(A \text{ AND } B)$$



Événements élémentaires équiprobables

- Le cas le plus simple : quand il y a *un nombre fini d'éléments élémentaire* de l'ensemble fondamental à *la même probabilité* d'apparaître (**équiprobable**)
- En appliquant l'axiome 3, on a que pour tout événement E :

$$P(E) = \frac{\text{nombre de points dans } E}{\text{nombre de points dans } S}$$

Exemple 2.9 Si deux dés sont lancés (et en supposant que les 36 issues possibles sont *équiprobables*), quelle est la probabilité que la somme des faces soit 8 ?

Solution Les issues correspondant à l'événement somme = 8

sont _____

donc la probabilité (*inconditionnelle*) de l'événement = _____

Ensemble fondamental (bleu, rouge)

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Exemple 2.9, cont.

Maintenant je donne l'information : le premier dé est 

⇒ *Sachant* cette information, $P(\text{somme} = 8) = ??$

Solution Le calcul pour la probabilité quand les issues sont *équiprobables* :

$$P(E) = \frac{\text{nombre de points dans } E}{\text{nombre de points dans } S}$$

⇒ Maintenant, combien d'issues dans l'ensemble fondamental S ??

Sachant que le premier dé est  :

- *l'ensemble fondamental est changé*
- Maintenant, on considère *seulement les issues* dont le premier dé est  :

Ensemble fondamental

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Exemple 2.9, cont

- Il y a _____ issues dans ce nouvel ensemble fondamental
- **PARMI ces issues**, combien correspondent à l'événement :
{somme = 8} ??

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- Donc, la probabilité que la somme égale 8, SACHANT que le premier (bleu) était 3 est : _____