GC – Probabilités et Statistique – Corrigés 6

À noter : les **raisonnements/justifications** des étapes de résolution sont également importantes (pas seulement le résultat final).

En salle

Exercice 1 (a) $\boxed{\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}(x+y)\,dx\,dy} = \int_{x=0}^{1}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x=0}^{1}dx = \int_{x=0}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-(0+0)\ \boxed{=1}$$, donc f est bien une densité.

(b) $f_X(x) = \int_{y=0}^{1}(x+y)\,dy = \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{1} \implies \boxed{f_X(x) = x+\frac{1}{2},\ 0\le x\le 1\ (=0 \text{ sinon})}$

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{1}(x+y)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Big|_{x=0}^{1} \implies \boxed{f_Y(y) = \frac{1}{2}+y,\ 0\le y\le 1\ (=0 \text{ sinon})}$$

(c) $f_X(x)\cdot f_Y(y) = xy+\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{4} \neq f_{X,Y}(x,y)$, donc X et Y NE SONT PAS indépendantes.

(d) $E[X] = \int_{x=0}^{1} x f_X(x)\,dx = \int_{x=0}^{1}\left(x^2+\frac{x}{2}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{x=0}^{1} \implies \boxed{E[X] = \frac{7}{12}}$

$$E[X^2] = \int_{x=0}^{1} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{x=0}^{1}\left(x^3+\frac{x^2}{2}\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}\right)\Big|_{x=0}^{1} = \frac{5}{12}$$

$$Var(X) = E[X^2]-(E[X])^2 = \frac{5}{12}-\frac{49}{144} \implies \boxed{Var(X) = \frac{11}{144}}$$

En raison de symétrie, $\boxed{E[Y] = E[X] \text{ et } Var(Y) = Var(X)}$

Exercice 2 $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{c(x^2-y^2)e^{-x}}{\int_{y=-x}^{x} c(x^2-y^2)e^{-x}\,dy} = \frac{3}{4}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^3}$ si $-x\le y\le x$; $f_{Y|X}(y \mid x) = 0$ sinon.

$$\implies F_{Y|X}(y \mid x) = \int f_{Y|X}(y \mid x)\,dy = \int_{-x}^{y}\frac{3}{4}\frac{x^2-y^2}{x^3}\,dy = \frac{3}{4x^3}\int_{-x}^{y}(x^2-y^2)\,dy$$

$$= \frac{3}{4x^3}\left[x^2y-y^3/3\right]\Big|_{y=-x}^{y} = \frac{3}{4x^3}\left(x^2y-y^3/3+2x^3/3\right) = \boxed{1/2+3y/(4x)-y^3/(4x^3)}$$

Exercice 3 (a) 1. Soit $\overline{X}$ = la moyenne des 49 additions

2. (TCL/CLT) $\overline{X} \sim N(\mu = 12, \sigma = 4/\sqrt{49})$

3,4. $P(\overline{X} \geq 14) = P\left(\boxed{\frac{\overline{X}-12}{4/7}} \geq \frac{14-12}{4/7}\right) \approx P(Z \geq 3.5) < (1 - 0.9998) \approx \boxed{0.0002}$

(b) 1. Soit X = le nombre de restaurants dont la moyenne > 14

2. $\mathbf{X} \sim Bin(n = 100, p = 0.0002)$

3,4. $E[X] = np = 100(0.0002) = 0.02$; donc, 0 restaurants.

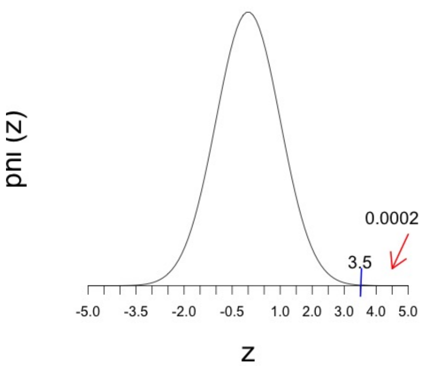

FIGURE 1 – ex. 3

À domicile

Exercice 1 (a) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=1}^{5}(x/5 + cy)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1}(4x/5 + 12c)\, dx = 12c + 2/5 = 1 \implies \boxed{c = \frac{1}{20}}$

(b) Non, car la densité conjointe $f(x,\, y) = x\,(1/5 + y/(20x)) = g(x)\, k(x,\, y)$. ne se factorise pas en deux fonctions $g(x)\, h(x)$

(c) $P(X + Y > 3) = \int_{x=0}^{1}\int_{y=3-x}^{5}(x/5 + y/20)\, dy\, dx$

$= \int_{x=0}^{1}[(2+x)x/5 + 25/40 - (3-x)^2/40]\, dx = 1/5 + 1/15 + 5/8 - 19/120 = \boxed{\frac{11}{15}}$

Exercice 2 (a) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}\frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right)\, dy\, dx = \frac{6}{7}\int_{x=0}^{1}\left(x^2 y + \frac{xy^2}{4}\right)\Big|_{y=0}^{2} dx$

$= \frac{6}{7}\int_{x=0}^{1}(2x^2 + x)\, dx \frac{6}{7}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=0}^{1} = \frac{6}{7}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = 1 \implies$ f est bien une fonction de densité

(b) $f_X(x) = \int_{y=0}^{2}\frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right)\, dy = \boxed{\frac{6}{7}(2x^2 + x),\ 0 < x < 1}$

(c) $P(X > Y) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dy\,dx = \frac{6}{7}\int_{x=0}^{1}\left(x^2 y + \frac{xy^2}{4}\right)\Big|_{y=0}^{x} dx$

$$= \frac{6}{7}\int_{x=0}^{1} \frac{5}{4}x^3\,dx = \frac{6}{7}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^{1} = \boxed{\frac{15}{56}}$$

(d) $E[X] = \int_{x=0}^{1} x f_X(x)\,dx = \frac{6}{7}\int_{x=0}^{1} x(2x^2 + x)\,dx = \frac{6}{7}\left(\frac{2x^2}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{1} = \frac{6}{7}\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{5}{7}}$

(e) $E[Y] = \int_{y=0}^{2} y\, f_Y(y)\,dy$ [définition] ;

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{1} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dx = \frac{6}{7}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2}\right)\Big|_{x=0}^{1} = \frac{6}{7}\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{4}\right),\ 0 < y < 2,$$

$$\Longrightarrow E[Y] = \frac{6}{7}\int_{y=0}^{2} y\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{4}\right) dy = \left(\frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{12}\right)\Big|_{y=0}^{2} = \frac{6}{7}\left(\frac{4}{6} + \frac{8}{12}\right) = \boxed{\frac{8}{7}}$$

Exercice 3 Intervalle de confiance pour la moyenne de la population μ : $\overline{x} \pm z \times s/\sqrt{n}$

(a) Pour un IC de 95%, $z = 1.96$ (c'est autorisé à utiliser la valeur $z = 2$ au lieu de 1.96).

$\overline{x} \pm 1.96 \times s/\sqrt{n} \Rightarrow$ $\boxed{90 \pm 1.96 \times 10/\sqrt{64} \text{ grammes}}$ ou $\boxed{90 \pm 2 \times 10/\sqrt{64} \text{ grammes}}$

(également $90 \pm 1.96 \times 1.25$, ou 90 ± 2.45, ou $(87.55, 92.45)$ grammes)

(b) Le paramètre ($\mu =$ poids moyenne) de la population est inconnu ; échantillon aléatoire (indépendant ou EAS) ; TCL s'applique

(c) [Afin de simplifier les calculs, on prend $z = 2$]

Longueur d'un IC à 95% : $\overline{x} + 2 \times s/\sqrt{n} - (\overline{x} - 2 \times s/\sqrt{n}) \;=\; \underline{4 \times s/\sqrt{n}}$

$\Rightarrow$ Trouver n tel que $4 \times 10/\sqrt{n} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 4 \times 10/1 \Rightarrow n \geq (40)^2 \Rightarrow$ $\boxed{n \geq 1600}$

[Remarquons que la longueur de l'IC partie (a) $= 4 \times 10/\sqrt{64} = 5$, et que 1 est <u>5 fois</u> plus petit. Donc afin d'avoir une longueur 5 fois plus petite, il faut un échantillon de taille <u>5^2 fois de plus</u> ; $5^2 = 25 \Rightarrow 25 \times 64 = 1600$.]

(d) Ici, on utilise $z = 2.58$, donc $(86.775, 93.225)$

(e) Longueur (a) $= 92.45 - 87.55 = 4.9$; longueur (d) $= 93.225 - 86.775 = 6.45$.
Il faut un intervalle plus longue si on veut avoir plus de confiance.