

À noter : les raisonnements/justifications des étapes de résolution sont également importantes (pas seulement le résultat final).

En salle

Exercice 1 $\int_x^1 5(1-y)^4 dy = 0,01 \implies -(1-y)^5 \Big|_x^1 = (1-x)^5 = 0,01 \implies \boxed{x = 1 - (0,01)^{1/5}}$

Exercice 2

1. Soit $\underline{X}$ le score de la personne (nombre de points)

2. $X \sim N(\mu = 100, \sigma^2 = 15^2)$

[selon les infos du problème]

(a) 3. Probabilité que le score dépasse 125 : $P(X > 125)$

4. $P(X > 125) = P\left(\frac{X - 100}{15} > \frac{125 - 100}{15}\right)$ [standardiser les 2 côtés]

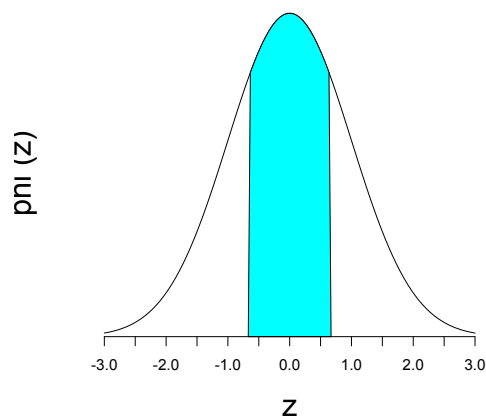
$= P(Z > 1.67) = 1 - \underbrace{P(Z \leq 1.67)}_{\Phi(1.67)} = 1 - 0.9525 = \boxed{0.0475}$ [$Z \sim N(0, 1)$; table, simp.]

(b) 3. Probabilité que le score soit entre 90 et 110 : $P(90 < X < 110)$ (ou : $P(90 \leq X \leq 110)$)

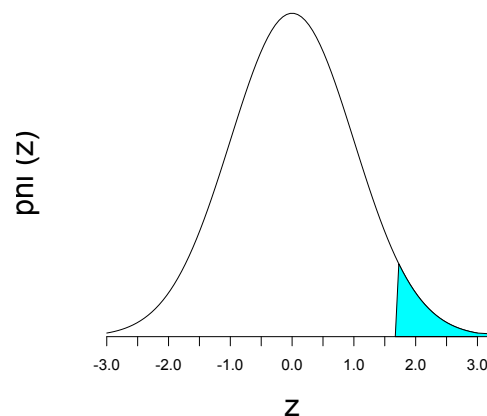
4. $P(90 < X < 110) = P\left(\frac{90 - 100}{15} < \frac{X - 100}{15} < \frac{110 - 100}{15}\right)$ [standardiser]

$= P(-0.67 < Z < 0.67) = \underbrace{P(Z < 0.67)}_{\Phi(0.67)} - \underbrace{P(Z < -0.67)}_{\Phi(-0.67)}$ [calculs, $Z \sim N(0, 1)$]

$= \underbrace{P(Z < 0.67)}_{\Phi(0.67)} - \underbrace{(1 - P(Z < 0.67))}_{\Phi(-0.67)} = 0.7486 - (1 - 0.7486) = \boxed{0.4972 \approx 0.5}$ [table, simp.]



(a) ex. 2a



(b) ex. 2b

Exercice 3 Trouver z tel que $P(Z > z) = 0.10$:

$$\Rightarrow P(Z \leq z) = 0.90 \Rightarrow z = 1.28 \quad [\text{d'après la table de la distribution normale}]$$

$$\text{Alors, } z = 1.28 = (c - 12)/\sqrt{4} \Rightarrow c = 12 + \sqrt{4} \times 1.28 \Rightarrow \boxed{c = 14.56}$$

À domicile

Exercice 1 (a) En utilisant le fait que l'intégrale de la fonction de densité doit être égale 1, on a :

$$1 = \int_0^1 cx^n dx = \frac{cx^{n+1}}{n+1} \Big|_{x=0}^1 = c \left[\frac{1}{n+1} - 0 \right] = \frac{c}{n+1} \Rightarrow \boxed{c = n+1}$$

$$(b) P(X > x) = \int_x^1 f(u) du = (n+1) \int_x^1 u^n du = u^{n+1} \Big|_{u=x}^1 = \boxed{1 - x^{n+1}}$$

Exercice 2 (a) (1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 = \int_0^1 (ax + bx^2) dx = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$ [int. dens. = 1, éval. int.]

(2) $E[X] = 0.6 = \int_0^1 x(ax + bx^2) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{4}$ [info. du problème, déf. esp., éval. int.]

Alors, (1) $\Rightarrow a + 2b/3 = 2 \Rightarrow a = 2 - 2b/3$;

substitution en (2) : $(2 - 2b/3)/3 + b/4 = 0.6 \Rightarrow 1/15 = -b/36 \Rightarrow b = -12/5 = -2.4$;

$$\Rightarrow a = 2 - 2(-2.4)/3 \Rightarrow a = 18/5 = 3.6; \text{ donc } \boxed{a = 3.6, b = -2.4}$$

(b) $P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} (3.6x - 2.4x^2) dx = (1.8x^2 - 0.8x^3) \Big|_{x=0}^{1/2} = \boxed{0.35}$ [prob. VA cont.]

(c) $E[X^2] = \int_0^1 (3.6x^3 - 2.4x^4) dx = 0.9x^4 - 0.48x^5 \Big|_{x=0}^1 = 0.9 - 0.48 = 0.42$ [E(g(X)), éval. int.]

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 0.42 - 0.36 = \boxed{0.06} \quad [\text{formule alternative Var(X)}]$$

Exercice 3

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n} (E[X_1 + \dots + X_n]) \quad [\text{subst., factoriser const. de l'esp.}]$$

$$= \frac{1}{n} (E[X_1] + \dots + E[X_n]) = \frac{n\mu}{n} = \underline{\mu} \quad [\text{esp. somme des VAs}]$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} [\text{Var}(X_1 + \dots + X_n)] \quad [\text{subst., var. const. } \times \text{ VA}]$$

$$= \frac{1}{n^2} [\text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \underline{\frac{\sigma^2}{n}} \quad [\text{var. somme des VAs indépend.}]$$

Exercice 4 1. Soit $\underline{X}$ = score de Gilles, $\underline{Y}$ = score de Jacques.

2. $X \sim N(170, 20^2)$, $Y \sim N(160, 15^2)$ [selon les infos du problème]

(a) 1. Soit $\underline{Y} - \underline{X}$ la différence des scores J-G

2. $Y - X \sim N(\underline{\mu} = 160 - 170 = \underline{-10}, \underline{\sigma^2} = (20)^2 + (15)^2 = \underline{625})$ [comb. lin. VAs normales]

3, 4. $P(Y > X) = P(Y - X > 0)$

$$= P\left(\frac{(Y - X) - (-10)}{\sqrt{625}} > \frac{0 - (-10)}{\sqrt{625}}\right) \quad \text{[standardiser les 2 côtés]}$$

$$= P(Z > 0.4) = 1 - \underbrace{P(Z \leq 0.4)}_{\Phi(0.4)} \quad \text{[simp., sym.]}$$

$$= 1 - 0.6554 \Rightarrow \boxed{P(Y > X) \approx 0.34} \quad \text{[table normale]}$$

(b) 1. Soit $\underline{X} + \underline{Y}$ la somme des scores

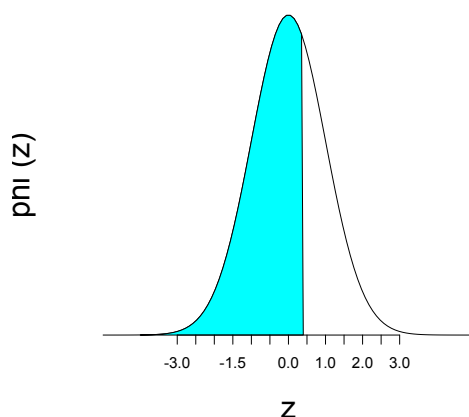
2. $X + Y \sim N(\underline{\mu} = 170 + 160 = \underline{330}, \underline{\sigma^2} = (20)^2 + (15)^2 = \underline{625})$ [comb. lin. VAs normales]

3, 4. $P(X + Y > 350)$

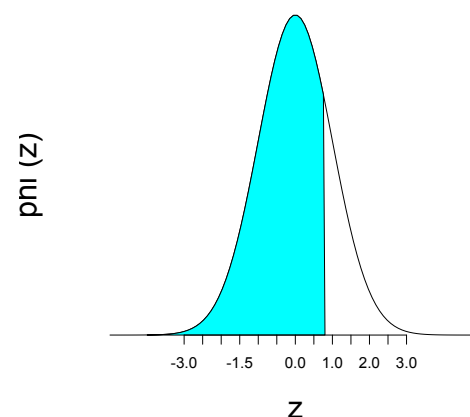
$$= P\left(\frac{(X + Y) - 330}{\sqrt{625}} > \frac{350 - 330}{\sqrt{625}}\right) \quad \text{[standardiser les 2 côtés]}$$

$$= P(Z > 0.8) = 1 - \underbrace{P(Z \leq 0.8)}_{\Phi(0.8)} \quad \text{[simp.]}$$

$$= 1 - 0.7881 \Rightarrow \boxed{P(X + Y > 350) \approx 0.21} \quad \text{[table normale]}$$



(a) ex. 3a



(b) ex. 3b