

À noter : les raisonnements/justifications des étapes de résolution sont également importantes (pas seulement le résultat final). En salle

Exercice 1 Soit S l'événement que la plante survit (c.-à-d. elle ne meurt pas, donc le *complément* de l'événement que la plante meurt), et A l'événement que le voisin l'a arrosé.

Selon les infos du problème :

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.90 \\ P(S^c | A) = 0.15 \\ P(S^c | A^c) = 0.8 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(A^c) = 1 - 0.90 = 0.10 \\ P(S | A) = 1 - P(S^c | A) = 1 - 0.15 = 0.85 \\ P(S | A^c) = 1 - P(S^c | A^c) = 1 - 0.8 = 0.2 \end{array}$$

(a) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(S | A)P(A) + P(S | A^c)P(A^c) = (0.85)(0.9) + (0.2)(0.1) = \boxed{0.785}$$

(b) En utilisant la formule de Bayes et le fait que $P(S^c) = 1 - P(S)$ ($= 0.215$), on a

$$P(A^c | S^c) = \frac{P(S^c | A^c)P(A^c)}{P(S^c)} = \frac{(0.8)(0.1)}{0.215} = \boxed{\frac{16}{43}} \quad (\approx 0.37)$$

Pour tous les prochains exercices, suivre les 4 étapes pour résoudre les problèmes des VAs, soient :

1. Identifier la VA
2. Déterminer la distribution (loi) de la VA
3. Traduire la question
4. Répondre à la question

Exercice 2

1. Soit Y le nombre de familles de 6 enfants dont 4 ou plus sont filles

$$2. Y \sim \text{Bin} \left(n = 5, p = \underline{\underline{\frac{11}{32}}} \right)$$

Vérification des 4 conditions :

- (i) nombre fixe : $n = 5$
- (ii) épreuves de Bernoulli : 2 possibilités (au moins 4 filles/pas)
- (iii) épreuves indépendantes : oui, si l'on suppose que les 5 familles sont indépendantes
- [*] (iv) même probabilité de 'succès' pour chaque épreuve : $p = \underline{\underline{\frac{11}{32}}}$

Supposition : le nombre de filles d'une famille de 6 enfants est bien modélisée par le nombre de 'piles' obtenu en lançant 6 fois (indépendamment) une pièce équilibrée

[*] Calcul de p (d'après l'Exemple 3.6) :

1'. Soit X le nombre de filles

$$2'. X \sim \text{Bin}(n = 6, p_X = 1/2)$$

Vérification des 4 conditions :

- (i) nombre fixe : $n = 6$
- (ii) épreuves de Bernoulli : 2 possibilités (filles/garçon)
- (iii) épreuves indépendantes : oui, si l'on suppose que les enfants sont indépendantes

(iv) même probabilité de ‘fille’ pour chaque enfant : $p_X = 1/2$
 [supposition]

3'. Probabilité que le nombre de filles $\underline{X}$ soit au moins 4 : $P(X \geq 4)$

4'. $\underline{P(X \geq 4)} = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$$\begin{aligned}
 &= \binom{6}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^6 [15 + 6 + 1] = \frac{22}{64} = \underline{\underline{\frac{11}{32}}}
 \end{aligned}$$

[prob. union év. mut. excl.]
 [loi binomiale]
 [simplification]

3. Probabilité que le nombre de familles d'au moins 4 filles $\underline{Y}$ soit au moins 3 : $P(Y \geq 3)$

4. $P(Y \geq 3) = P(Y = 3) + P(Y = 4) + P(Y = 5)$ [prob. union év. mut. excl.]

$$= \binom{5}{3} \left(\frac{11}{32}\right)^3 \left(\frac{21}{32}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{11}{32}\right)^4 \left(\frac{21}{32}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{11}{32}\right)^5 \left(\frac{21}{32}\right)^0$$

[loi binomiale]

$$\approx \boxed{0.226}$$

Exercice 3

1. Soit $\underline{X}$ le nombre des examinateurs qui juge l'étudiant suffisant, et $\underline{F}$ l'événement que l'étudiant est en forme

2. Quand il est en forme : $X | F \sim \text{Bin}(n, p = 0.8)$; sinon, on a $X | F^c \sim \text{Bin}(n, p = 0.4)$

Vérification des 4 conditions :

- (i) nombre fixe : $n = 3$ ou 5 (selon le nombre de juges)
- (ii) épreuves de Bernoulli : 2 possibilités (suffisant/pas)
- (iii) épreuves indépendantes : oui, si l'on suppose que les juges sont indépendantes
- (iv) même probabilité de ‘succès’ pour chaque épreuve : $p = 0.8$ ou 0.4 ,
 selon s'il est en forme ou pas

Selon les infos du problème, $P(\text{en forme}) = 1/3$, et donc $P(\text{pas en forme}) = 2/3$.

3. Les probabilités intéressantes pour l'étudiant sont :

$P(\text{promu} | \text{nombre de juges} = 3)$ et $P(\text{promu} | \text{nombre de juges} = 5)$.

[*] On note que $P(\text{en forme}) = P(\text{en forme} | \text{nombre de juges} = n)$, $n = 3, 5$ (et donc $P(\text{pas en forme}) = P(\text{pas en forme} | \text{nombre de juges} = n)$) car l'événement ‘en forme’ (et ‘pas’) pourrait être supposé indépendant du nombre de juges.

4. En utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
 \underline{P(\text{promu} | 3)} &= P(\text{en forme} | 3) P(\text{promu} | \text{en forme}, 3) + P(\text{pas} | 3) P(\text{promu} | \text{pas}, 3) \\
 &= P(\text{en forme}) P(\text{promu} | \text{en forme}, 3) + P(\text{pas}) P(\text{promu} | \text{pas}, 3) \quad [*] \\
 &= P(\text{en forme}) P(X \geq 2 | F, 3) + P(\text{pas}) P(X \geq 2 | F^c, 3) \\
 &= P(\text{en forme}) [P(X = 2 | F, 3) + P(X = 3 | F, 3)] \quad [\text{prob. union év. mut. excl.}] \\
 &\quad + P(\text{pas}) [P(X = 2 | F^c, 3) + P(X = 3 | F^c, 3)] \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{i=2}^3 \binom{3}{i} (0.8)^i (0.2)^{3-i} + \frac{2}{3} \sum_{i=2}^3 \binom{3}{i} (0.4)^i (0.6)^{3-i} \quad [\text{lois binomiales}] \\
 &\approx \frac{1}{3} (0.896) + \frac{2}{3} (0.352) \approx \underline{\underline{0.533}} \quad [\text{calculs, simplification}]
 \end{aligned}$$

D'une manière similaire,

$$\begin{aligned} \underline{P(\text{promu} \mid 5)} &= \frac{1}{3} \sum_{i=3}^5 \binom{5}{i} (0.8)^i (0.2)^{5-i} + \frac{2}{3} \sum_{i=3}^5 \binom{5}{i} (0.4)^i (0.6)^{5-i} && [\text{lois binomiales}] \\ &\approx \frac{1}{3} (0.942) + \frac{2}{3} (0.317) \approx \underline{0.526} \end{aligned}$$

Enfin, on note que la probabilité de promotion est plus grande avec 3 examinateurs .

À domicile

Exercice 1

1. Soit $\underline{X}$ le nombre de bonnes réponses pour les 10 jets
2. $X \sim \text{Bin}(n = 10, p = 1/2)$

Vérification des 4 conditions :

- (i) nombre fixe : $n = 10$
 - (ii) épreuves de Bernoulli : 2 possibilités (pile/face)
 - (iii) épreuves indépendantes : oui, si l'on suppose que les jets sont indépendants
 - (iv) même probabilité de 'succès' pour chaque épreuve : $p = 1/2$
3. Probabilité que le nombre de bonnes réponses $\underline{X}$ soit au moins 7 : $P(X \geq 7)$
 4. $P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$ [prob. union événements mutuellement exclusifs]

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=7}^{10} \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{10-i} \\ &= \binom{10}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{10}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} [120 + 45 + 10 + 1] = \frac{176}{2^{10}} = \frac{16 \times 11}{16 \times 64} = \boxed{\frac{11}{64}} (\approx 0.17) \text{ [simplification]} \end{aligned}$$

Exercice 2 [La solution est semblable à celle de l'Exercice 2 'en salle'.]

1. Soit $\underline{Y}$ le nombre de lots retournés
2. $Y \sim \text{Bin}(n = 3, \underline{p = 0.0043})$

Vérification des 4 conditions :

- (i) nombre fixe : $n = 3$
- (ii) épreuves de Bernoulli : 2 possibilités (au plus 1 disquette défectueuse/pas)
- (iii) épreuves indépendantes : oui, si l'on suppose que les lots sont indépendantes
- [*] (iv) même probabilité de 'succès' pour chaque épreuve : $p = 0.0043$

[*] Calcul de p :

- 1'. Soit $\underline{X}$ le nombre de disquettes défectueuses
- 2'. $X \sim \text{Bin}(n = 10, p_X = 0.01)$

Vérification des 4 conditions :

- (i) nombre fixe : $n = 10$
- (ii) épreuves de Bernoulli : 2 possibilités (défectueuse/pas)
- (iii) épreuves indépendantes : oui, si l'on suppose que les disquettes sont indépendantes
- (iv) même probabilité d'être 'défectueuse' pour chaque disquette :

$$p_X = 0.01$$

3'. Probabilité que le nombre de disquettes défectueuses est au plus 1 : $\underline{X}$ soit au plus 1 : $P(X \leq 1)$

$$4'. \underline{P(X \leq 1)} = P(X = 0) + P(X = 1) \quad [\text{prob. union év. mut. excl.}]$$

$$= \binom{10}{0} (0.99)^{10} (0.01)^0 + \binom{10}{1} (0.99)^9 (0.01)^1 \quad [\text{loi binomiale}]$$

$$\approx \underline{0.9957} \quad [\text{simplification}]$$

Alors, la probabilité qu'un lot contient au plus 1 disque défectueuse = 0.9957 et donc la probabilité qu'un lot doit être retourné = la probabilité que le lot contient plus qu'une disque défectueuse = $1 - 0.9957 = \underline{0.0043}$.

3. Probabilité que le nombre de lots avec au plus 1 disquette défectueuse $\underline{Y}$ soit 1 : $P(Y = 1)$

$$4. P(Y = 1) = \binom{3}{1} (0.0043) (0.9957)^2 \approx \boxed{0.013} \quad [\text{loi binomiale, simplification}]$$