

À noter : les raisonnements/justifications des étapes de résolution sont également importantes (pas seulement le résultat final). En salle

Exercice 1 (a) Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a $3 \text{ (pâtes)} \cdot 2 \text{ (choix de fromage)} \cdot 5 \text{ (choix de garniture)} = 30$ pizzas possibles.

(b) Il y a $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ combinaisons de 2 garnitures pour la pizza pour chaque combinaison de pâte et fromage, donc par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a $3 \cdot 2 \cdot \binom{5}{2} = 3 \cdot 2 \cdot 10 = 60$ pizzas possibles.

Exercice 2 (a) Sans restriction, il y a 10 choix possibles pour le président. Pour chacun il y a 9 choix possibles pour le trésorier, et pour chaque combinaison il y a 8 choix possibles pour le secrétaire. Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a donc $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ choix possibles.

(b) Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ choix sans A ni B , et il y a $3 \cdot 8 \cdot 7 = 168$ choix où A (mais pas B) a une charge (car il y a 3 choix pour l'office d' A pour chaque combinaison (dont il y a $8 \cdot 7$) de deux autres personnes pour les autres offices). Similairement, il y a $3 \cdot 8 \cdot 7 = 168$ choix où B (mais pas A) a une charge. Donc, il y a $336 + 2 \cdot 168 = 672$ choix possibles.

[On pourrait aussi compter le nombre avec les deux A et B et soustraire de 720, le nombre total de choix possibles. Il y a 3 choix pour A , puis 2 choix pour B , enfin 8 choix pour l'officier qui reste. Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a $3 \cdot 2 \cdot 8 = 48$ comités avec les 2, donc $720 - 48 = 672$ choix possibles.]

(c) De la même manière de (b), par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, le nombre de choix avec C et D est $3 \cdot 2 \cdot 8 = 48$: 3 offices possibles pour C , et pour chaque choix d'office pour C il reste 2 choix d'office pour D ; il reste 8 personnes possibles pour la dernière charge. Le nombre sans C ni D est $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ (Principe fondamental de dénombrement généralisé). Donc le total est $48 + 336 = 384$ choix possibles.

(d) Il y a 3 choix pour E , et pour chacun il y a $9 \cdot 8$ choix pour les deux autres officiers. Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a $3 \cdot 9 \cdot 8 = 216$ choix possibles.

(e) Ceci est le total du nombre de comités sans F et le nombre de comités dont F est président. Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, le nombre de comités sans F est $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. Le nombre où F est le président est $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$, donc $504 + 72 = 576$ comités possibles.

Exercice 3 (a) Tous les $\binom{10}{5}$ examens possibles sont **équiprobables**, dont $\binom{7}{5}$ que l'étudiant sait résoudre ; donc, la probabilité est $\binom{7}{5} / \binom{10}{5} = \underline{\frac{1}{12}}$.

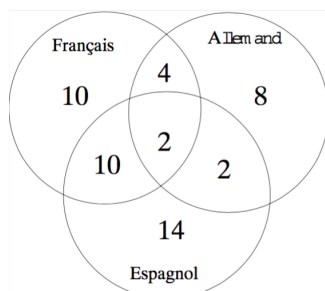
(b) En application du **Principe fondamental de dénombrement généralisé**, le nombre d'exams dont l'étudiant sait résoudre 4 sur 5 questions (et ne sait pas pour 1) est $\binom{7}{4} \binom{3}{1}$, donc la probabilité que l'étudiant sait résoudre 4 questions est $\binom{7}{4} \binom{3}{1} / \binom{10}{5} = \frac{5}{12}$.

La probabilité qu'il sait résoudre au moins 4 est **la somme** des probabilités qu'il sait résoudre 4 et qu'il sait résoudre 5 (**ces deux événements sont disjoints/ mutuellement exclusifs**), donc $\frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \underline{\frac{1}{2}}$.

À domicile

Exercice 1 Par le **Principe fondamental de dénombrement généralisé**, il y a $5 \cdot 2 \cdot 4 = \underline{40}$ répliques de l'expérience.

Exercice 2



Événement A : "suit le cours d'allemand".

Événement F : "suit le cours de français".

Événement E : "suit le cours d'espagnol".

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{28}{100} & P(A) &= \frac{16}{100} & P(F) &= \frac{26}{100} \\ P(E \cap F) &= \frac{12}{100} & P(E \cap A) &= \frac{4}{100} & P(F \cap A) &= \frac{6}{100} \\ P(E \cap A \cap F) &= \frac{2}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(a) On a } P(\bar{E} \cap \bar{A} \cap \bar{F}) &= 1 - P(E \cup A \cup F) && \text{[deMorgan, complément]} \\ &= 1 - [P(E) + P(A) + P(F) && \text{[inclusion-exclusion]} \\ &\quad - P(E \cap A) - P(E \cap F) - P(F \cap A) + P(E \cap A \cap F)] \\ &= 1 - \left[\frac{28}{100} + \frac{16}{100} + \frac{26}{100} - \frac{4}{100} - \frac{12}{100} - \frac{6}{100} + \frac{2}{100} \right] = \frac{50}{100} = \underline{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(b) D'abord, notons que pour événements G et H , l'événement $G \cap \bar{H} = G \setminus (G \cap H)$ (*) (c'est-à-dire, la partie de G qui n'est pas contenu en $G \cap H$). Vous pouvez faire un diagramme de Venn pour une visualisation de ce fait. Alors, de la même manière qu'on a fait pour la partie (a), on a :

$$\begin{aligned} &P(E \cap \bar{A} \cap \bar{F}) + P(\bar{E} \cap A \cap \bar{F}) + P(\bar{E} \cap \bar{A} \cap F) \\ &= P(E \cap (\bar{A} \cap \bar{F})) + P(A \cap (\bar{E} \cap \bar{F})) + P(F \cap (\bar{A} \cap \bar{E})) && \text{[associativité, deMorgan]} \\ &= [P(E) - \underline{P(E \cap (A \cup F))}] + [P(A) - \underline{P(A \cap (E \cup F))}] + [P(F) - \underline{P(F \cap (A \cup E))}]. && [*] \end{aligned}$$

Maintenant, calculons (p. ex.) $\underline{P(E \cap (A \cup F))}$:

$$\underline{P(E \cap (A \cup F))} = P(E) + \boxed{P(A \cup F)} - \underline{\underline{P(E \cup A \cup F)}} \quad [\text{inclusion-exclusion}]$$

$$\boxed{P(A \cup F)} = P(A) + P(F) - P(A \cap F) \quad [\text{inclusion-exclusion}]$$

$$\underline{P(E \cup A \cup F)} = P(E) + P(A) + P(F) - P(E \cap A) - P(E \cap F) - P(A \cap F) + P(E \cap F \cap A) \quad [\text{inclusion-exclusion}]$$

$$\implies \underline{P(E \cap (A \cup F))} = P(E) + P(A) + P(F) - P(A \cap F) \quad [\text{substitution}]$$

$$- [P(E) + P(A) + P(F) - P(E \cap A) - P(E \cap F) - P(A \cap F) + P(E \cap F \cap A)]$$

$$= P(E \cap A) + P(E \cap F) - P(E \cap F \cap A) \quad [\text{et de manière similaire pour les autres termes}]$$

$$\text{Et donc } [*] = [P(E) - \boxed{P(E \cap A)} - \boxed{P(E \cap F)} + \underline{\underline{P(E \cap A \cap F)}}]$$

$$[P(A) - \boxed{P(A \cap E)} - \boxed{P(A \cap F)} + \underline{\underline{P(E \cap A \cap F)}}]$$

$$[P(F) - \boxed{P(F \cap A)} - \boxed{P(F \cap E)} + \underline{\underline{P(E \cap A \cap F)}}]$$

$$= P(E) + P(A) + P(F) - 2 \boxed{P(A \cap F)} - 2 \boxed{P(A \cap E)} - 2 \boxed{P(F \cap E)} + 3 \underline{\underline{P(E \cap A \cap F)}}$$

$$= \frac{28}{100} + \frac{16}{100} + \frac{26}{100} - 2 \times \frac{6}{100} - 2 \times \frac{4}{100} - 2 \times \frac{12}{100} + 3 \times \frac{2}{100} = \underline{\underline{\frac{32}{100}}}$$

(c) Notons X_i , l'événement "l'élève i suit au moins un cours" ($i = 1, 2$) ; alors,

$$P(X_1 \cup X_2) = P(X_1) + P(X_2) - P(X_1 \cap X_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{50}{100} \times \frac{49}{99} = 1 - \frac{49}{198} = \underline{\underline{\frac{149}{198}}}$$