

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

MATH-233– Midterm Probabilités et statistiques (PH)

Instructor : Anthony Davison

13 Novembre 2023

Nom et prénom : _____

SCIPER : _____

Cet examen contient 22 pages (y compris la page de couverture) et 5 questions. Le total des points est 35, mais l'examen sera noté sur 32. Bonne chance !

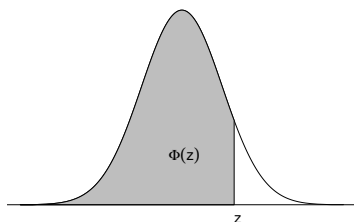
Distribution of Marks

Question	Points	Score
1	10	
2	10	
3	5	
4	7	
5	3	
Total:	35	

PROTOCOL :

- Aucun document personnel n'est autorisé.
- Les calculatrices simples sont permises. Il est interdit de s'échanger les calculatrices ou d'utiliser d'autres aides électroniques, y compris des natels.
- Justifiez vos réponses ! Une réponse non justifiée sera considérée comme fausse.
- Ecrivez vos réponses sur les feuilles d'examens. Si vous manquez de place, demandez une nouvelle feuille et agrafez-la.
- Vous avez le droit de questionner un assistant seulement si vous trouvez une faute de frappe. Sinon ils ne vont pas vous répondre. S'il vous semble qu'une question n'est pas claire, alors expliquez dans votre solution comment vous la comprenez.
- Des traductions anglaises des questions sont disponibles, mais la version française est celle de référence.
- Vous pouvez répondre en français ou en anglais.

Distribution normale standard $\Phi(z)$



Pour $z < 0$ on utilise symétrie : $\Pr(Z \leq z) = \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$, $z \in \mathbb{R}$.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56750	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84850	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92786	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

1. (10 points) Je jette deux dés standards équilibrés (c'est à dire, avec six faces équiprobables), un rouge et un bleu, et je note les chiffres des faces supérieures.
 - (a) Donner un espace de probabilité pour cette expérience aléatoire.
 - (b) Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement les événements 'le total des chiffres égale sept', 'le chiffre du dé rouge est pair', et 'le chiffre du dé bleu est pair'. Est-ce que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont indépendants? Sont-ils indépendants 2 à 2?
 - (c) Trouver la fonction de masse du maximum des deux chiffres, X .
 - (d) Trouver $E(X)$ et $E(X | \mathcal{A})$.

English : I throw two fair standard dice (i.e., with six equi-probable faces), one red and one blue, and note the numbers on the top faces.

- (a) Give a probability space for this random experiment.
 - (b) Let $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$ respectively be the events 'the total of the top faces equals 7', 'the number on the red die is even' and 'the number on the blue die is even'. Are $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$ independent? Are they pairwise independent?
 - (c) Find the probability mass function of the maximum of the two numbers, X .
 - (d) Compute $E(X)$ and $E(X | \mathcal{A})$.
2. (10 points) Considérer une suite des variables de Bernoulli indépendantes, chacune un succès avec probabilité $p \in (0, 1)$. Soient X_r le nombre d'essais lors de l'arrivée du r ème succès et Y le nombre d'essais lors de l'arrivée de deux succès successifs pour la première fois.
 - (a) Trouver la fonction de masse de X_r .
 - (b) Trouver $\Pr(X_1 > x + u | X_1 > u)$, pour $x, u \in \{1, 2, \dots\}$. Expliquer.
 - (c) Calculer l'espérance de X_1 et ainsi trouver $E(X_r)$.
 - (d) Calculer $E(Y)$.

Indication pour (d) : si $\mathcal{B}_s$ est l'événement que la suite commence avec s , alors $\mathcal{B}_{11}$, $\mathcal{B}_{10}$ et $\mathcal{B}_0$ partitionnent l'espace de probabilité.

English : Consider a sequence of independent Bernoulli trials, each a success with probability $p \in (0, 1)$. Let X_r be the number of trials at which the r th success appears and let Y be the number of trials at which two consecutive successes first appear.

- (a) Find the mass function of X_r .
- (b) Compute $\Pr(X_1 > x + u | X_1 > u)$, for $x, u \in \{1, 2, \dots\}$. Explain.
- (c) Compute the expectation of X_1 and hence find $E(X_r)$.
- (d) Compute $E(Y)$.

Hint for (d) : if $\mathcal{B}_s$ is the event that the sequence starts with s , then the events $\mathcal{B}_{11}$, $\mathcal{B}_{10}$ and $\mathcal{B}_0$ partition the probability space.

3. (5 points) Les timbres produits par la poste devraient être de forme carré de côté l cm. La machine étant mal calibrée, les timbres produits ne sont pas toujours exactement de côté l . On suppose que l'erreur de production est de $\pm 0.1l$ cm et que toutes les valeurs entre ces deux bornes sont équiprobables.
 - (a) Par quelle loi peut on modéliser les longueurs mesurées? Donner sa fonction de répartition.

(b) Trouver la fonction de densité de l'aire du timbre, et calculer son espérance.

English : The stamps produced by the Post Office should be square with sides of length l cm. The machine making them is badly calibrated, however, so although the stamps are square, their sides may not be of length l . Suppose that the production error is $\pm 0.1l$ cm on each side, and that all values in this range are equiprobable.

- (a) What distribution is suitable for modelling the lengths? Give its distribution function.
- (b) Find the density function of the area of a stamp, and the expected area.

4. (7 points) n étudiants arrivent indépendamment pour un cours de probabilité qui commence à 8.15. Chaque étudiant arrive X minutes après 8.00, où $\Pr(X > x) = \exp(-\lambda x)$, pour $x > 0$.

- (a) Le premier arrive W minutes après 8.00. Trouver la loi de W .
- (b) Calculer la probabilité que tout le monde soit à l'heure.
- (c) Quelle est la probabilité qu'au plus trois étudiants arrive après le début du cours?
- (d) Calculer le nombre moyen d'étudiants qui sont en retard.

English : n students arrive independently for a lecture on probability that starts at 8.15. Each student arrives X minutes after 8.00, where $\Pr(X > x) = \exp(-\lambda x)$, for $x > 0$.

- (a) The first arrives W minutes after 8.00. Find the distribution of W .
- (b) Find the probability that everyone will be on time.
- (c) What is the probability that at most three students will arrive after the lecture has started?
- (d) Find the expected number of students who are late.

5. (3 points) **(Bonus)**

Une question 'vrai ou faux' est posée à un couple lors d'un jeu télévisé. Ils donneront, indépendamment, la bonne réponse avec une probabilité p . Laquelle des deux stratégies suivantes donne la meilleure chance à réussir? (i) Choisir l'un des deux et le laisser répondre à la question. (ii) Considérer la question tous les deux, puis, soit donner la réponse commune s'ils sont d'accord, soit s'ils sont pas d'accord, de lancer une pièce équilibrée pour choisir 'vrai' ou 'faux'.

English : In a television game a 'true or false' question is posed to a couple, each of whom independently gives the right response with probability p . Which of the following strategies gives them a better chance of winning?

- (i) Let one of the couple reply without consulting the other. (ii) Give their joint answer if they agree, but otherwise toss a fair coin to choose 'true' or 'false'.