

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

MATH-233– Midterm Probabilités et statistiques (PH)

Instructor : Anthony Davison

11 Novembre 2021

Nom et prénom : _____

SCIPER : _____

Cet examen contient 4 pages (y compris la page de couverture) et 5 questions. Le total des points est 37, mais l'examen sera noté sur 32. Bonne chance !

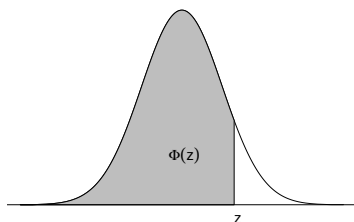
Distribution of Marks

Question	Points	Score
1	10	
2	7	
3	8	
4	7	
5	5	
Total:	37	

PROTOCOL :

- Aucun document personnel n'est autorisé.
- Les calculatrices simples sont permises. Il est interdit de s'échanger les calculatrices ou d'utiliser d'autres aides électroniques, y compris des natels.
- Justifiez vos réponses ! Une réponse non justifiée sera considérée comme fausse.
- Ecrivez vos réponses sur les feuilles d'examens. Si vous manquez de place, demandez une nouvelle feuille et agrafez-la.
- Vous avez le droit de questionner un assistant seulement si vous trouvez une faute de frappe. Sinon ils ne vont pas vous répondre. S'il vous semble qu'une question n'est pas claire, alors expliquez dans votre solution comment vous la comprenez.
- Des traductions anglaises des questions sont disponibles, mais la version française est celle de référence.
- Vous pouvez répondre en français ou en anglais.

Distribution normale standard $\Phi(z)$



Pour $z < 0$ on utilise symétrie : $\Pr(Z \leq z) = \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$, $z \in \mathbb{R}$.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56750	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84850	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92786	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

1. (10 points) Je jette deux dès tétraédriques équilibrés (c'est à dire, avec quatre faces équiprobables), un rouge et un vert.
 - (a) Donner un espace de probabilité pour cette expérience aléatoire.
 - (b) Trouver la loi de probabilité conjointe pour la somme des deux faces cachées, S , et leur maximum, M . Les variables S et M sont-elles indépendantes?
 - (c) Trouver la variance du maximum.
 - (d) Trouver la loi conditionnelle de la somme, sachant que le maximum est égal à 4.

English : I throw two fair tetrahedral dice (i.e., with four equi-probable faces), one red and one green.

- (a) Give a probability space for this random experiment.
- (b) Find the joint probability distribution of the sum of the two bottom faces of the dice, S , and their maximum, M . Are S and M independent?
- (c) Find the variance of the maximum.
- (d) Find the conditional distribution of the sum, given that the maximum equals 4.

2. (7 points) Vous voyagez avec votre soeur dans un train, et aucun de vous n'a de billet valable. Vous vous faites arrêter par le contrôleur qui vous punit de la manière suivante : Il vous offre une boîte de chocolat contenant neuf morceaux apparemment identiques, dont trois contiennent un poison mortel. Chacun de vous doit choisir et manger un morceau.
 - (a) Si vous choisissez avant votre soeur, quelle est la probabilité de survivre?
 - (b) Si vous choisissez le premier et vous survivez, quelle est la probabilité que votre soeur survive?
 - (c) Si vous choisissez le premier et vous mourrez, quelle est la probabilité que votre soeur survive?
 - (d) Est-il dans votre intérêt de persuader votre soeur de choisir la première?
 - (e) Si vous choisissez le premier, quelle est la probabilité de survivre sachant que votre soeur choisit la deuxième et survit?

English : You are travelling by train with your sister, and neither of you has a valid ticket. You are caught by the conductor, who inflicts the following punishment : he offers you a box of nine apparently identical chocolates, three of which contain a deadly poison. Each of you must choose a chocolate and eat it.

- (a) If you choose first, what is your probability of surviving?
- (b) If you choose first and survive, what is your sister's probability of surviving?
- (c) If you choose first and die, what is your sister's probability of surviving?
- (d) Is it in your interest to persuade your sister to choose first?
- (e) If you choose first, what is your probability of surviving, given that your sister chooses second and survives?

3. (8 points) Albert commence son travail comme facteur le jour 1. La probabilité qu'il se fasse mordre par un chien le jour n , étant donné qu'il n'a pas été mordu les jours précédents, est p_n . Soit X le jour où Albert est mordu pour la première fois.
- (a) Trouvez $\Pr(X = n)$.
 - (b) Albert est méfiant, donc $p_n = (n + 1)^{-1}$ décroît quand n croît. Trouvez $\Pr(X = n)$, et montrez que $E(X) = \infty$ mais que $\Pr(X < \infty) = 1$.
 - (c) Si Albert est mordu pour la première fois avant le jour m , quand est-ce que vous vous attendez à ce que cela lui arrive ?

English : Albert starts work as a postman on day 1. The probability that he is bitten by a dog on day n , given that he has not been bitten on any of the previous days, is p_n . Let X denote the day on which Albert is bitten for the first time.

- (a) Find $\Pr(X = n)$.
 - (b) Albert is wary, so $p_n = (n + 1)^{-1}$ decreases as n increases. Find $\Pr(X = n)$, and show that $E(X) = \infty$ but that $\Pr(X < \infty) = 1$.
 - (c) If Albert is bitten for the first time before day m , when do you expect this to happen ?
4. (7 points) Trois amis qui veulent dîner ensemble arrivent indépendamment au hasard entre 19.00 et 20.00 heures. Donner la fonction de densité pour l'heure d'arrivée du premier, la fonction correspondante pour le dernier, et le temps d'attente espéré du premier jusqu'à l'arrivée du dernier.

English : Three friends who want to dine together arrive independently at random between 7 and 8 o'clock. Give the density functions of the times of the first and last to arrive, and the mean waiting time of the first to arrive until the last arrives.

5. (5 points) **(Bonus)**

Un anglais veut écrire *école polytechnique fédérale de Lausanne*, mais ne sait pas où mettre des accents. Calculer la probabilité qu'il l'écrit juste si

- (a) il met trois accents aigus au hasard sur les lettres e ;
- (b) pour chaque lettre e il jette un dé pour décider s'il faut mettre un accent, mettant un accent grave ($\grave{e}$) si le résultat est 1 ou 4, un accent aigu ($\acute{e}$) si le résultat est 2 ou 5, et pas d'accent sinon.
- (c) Dans chaque cas trouver la probabilité que tous les accents soient orthographiés correctement sachant que le mot *fédérale* est écrit correctement.

English : An Englishman wants to write *école polytechnique fédérale de Lausanne* but doesn't know where to place the accents. Give the probability that he writes it correctly if

- (a) he places three acute accents randomly on the e s ;
- (b) for each e he throws a die to decide if an accent should be placed, putting a grave accent ($\grave{e}$) if the result is 1 or 4, an acute accent ($\acute{e}$) if the result is 2 or 5, and no accent otherwise.
- (c) In each case give the probability that all the accents are correct, given that the word *fédérale* is correct.