Probabilités et Statistique pour PH : Exercices

Série 1

To start the course we shall play with some random number generators in the statistical environment R. Your mission (should you choose to accept it) :

— download and install R from here. It is also useful to download and install RStudio (an integrated development environment with a build-in editor etc.) from here ;

— work your way through the tutorial here, which is also directly accessible from the course Moodle page ;

— take a look at the exercises below, which use the R random number generators. These are functions of the form `runif` and `sample`, which can be used as follows (there's no need to type the lines with comments shown by the `#`) :

```
# generate 20 independent uniform real values in the interval (0,1):
x <- runif(n=20)
# show the contents of x:
x
# generate a random permutation of the numbers 1:10, and show them:
(y <- sample(1:10))
# generate 20 independent integers in 1:10, with replacement, and show them:
(z <- sample(1:10, size=20, replace=TRUE))
# tabulate z, sorted to show duplicates:
sort(table(z))
```

Repeat each of these commands a few times, to see how the results vary.

Consider an event that may or may not occur when an experiment is performed : the experiment might be 'I throw a coin' and the event H might be 'the coin shows heads'. The elementary definition of the probability of H is as the limit of the number of times it occurs in a succession of n independent experiments, i.e.,

$$\Pr(H) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{H\}}{n}.$$

To reproduce this in the computer (for finite n) :

```
# generate n=20 independent values in the set {0,1},
# equally likely, with H=1/0 implying heads/tails:
(H <- rbinom(n=20, size=1, prob=0.5))
# estimate pr(H):
mean(H)
```

Repeat this a few times with $n = 20$, then see if the results are more satisfactory if you increase n (you should get to $n = 10^8$ without memory problems). Try also with different values of `prob`.

Random permutations : If we permute the numbers $1, \ldots, m$, how many digits stay in their original position ? For example, with $m = 10$ and one random permutation :

```
m <- 10
(x <- c(1:m))
(x.perm <- sample(x))
#  to count how many digits don't move we make a binary vector x==x.perm
sum(x==x.perm)
```

Repeat this a few times to see how it varies. For a more systematic study, we repeat the experiment n times, writing a function `f` to do the counting :

```
f <- function(m) sum( c(1:m)==sample(c(1:m)) )
n <- 10^4
res <- rep(NA, n)
for (i in 1:n) res[i] <- f(10)
table(res)
```

Repeat this a few times. Later we shall see that the numbers should be approximately

```
round(n*dpois(0:10,lambda=1),1)
```

Are they ?

Birthday problem : if there are m people in a group, what is the probability that they all have different birthdays ? To model this we suppose that birthdays are randomly and independently chosen in days 1,. . . , 365 (i.e., we ignore any seasonal variation, leap years, twins, . . .) :

```
# generate m=90 independent integers in 1:365, with replacement:
m <- 90 # rough size of your class
(z <- sample(1:365, size=m, replace=TRUE))
# tabulate z, sorted to show duplicates
sort(table(z))
```

Repeat this to see how it varies. To study this more systematically, we create a function g to compute the maximum number of birthdays that occur together in a random group of size m. Hence if $g(m) = 1$, all the birthdays are different :

```
g <- function(m) max(table(sample(1:365, size=m, replace=TRUE)))
n <- 10^5 # number of replicates
m <- 10 # size of group
res <- rep(NA, n)
for (i in 1:n) res[i] <- g(m)
table(res)
```

Repeat this for $m = 20, 30, \ldots, 90$. Discuss.

Numerical integration : random experiments have been used to estimate natural constants and to perform numerical integration (initially in the Manhattan project). To estimate π, suppose that we generate a random point (x, y) in the unit square. Then the probability that $(x, y) \in \mathcal{R} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x, y \leq 1\}$ is the ratio of the area of $\mathcal{R}$ to that of the unit square, i.e., $|\mathcal{R}|/1 = \pi/4$. Hence if we repeat this experiment n times, we can compute the estimate

$$\widehat{\pi} = 4\frac{\#\{(x, y) \in \mathcal{R}\}}{n} :$$

```
n <- 10^5
x <- runif(n)
y <- runif(n)
4*mean(x^2+y^2<=1)
```

Repeat this to see how it varies. How many of the digits are reliable ? How many digits are reliable if you increase n ?

Benford's law : many collections of numbers satisfy Benford's law, according to which the leading digits of numbers in scientific notation $S \times 10^P$, where $1 \leq S < 10$ and $P \in \mathbb{Z}$ arise as

```
d <- 1:9
rbind(d,log10(1+1/d))
```

For an example, we install an R package, and then access a dataset on US populations for different towns and cities in 2000 and 2010 :

```
install.packages("benford.analysis")
library("benford.analysis")
# check Benford's law for leading digits for 2000 populations
plot(benford(census.2000_2010$pop.2000,1))
# and for 2010 populations
plot(benford(census.2000_2010$pop.2010,1))
```

Curious, no ? The same phenomenon arises for many other natural quantities, and also for many unnatural ones, so Benford analysis is commonly applied in fraud detection . . .

A sticky problem : use R to estimate the probability that a triangle can be formed from the three pieces that result when a straight stick is broken at random in two places. Notice that if the length of one of the three pieces is more than one-half of the length of the stick, then a triangle cannot be made, but otherwise it can.

Série 2

Exercice 1. Soit Ω un ensemble et soient E, F et G trois événements de Ω. Quel événement correspond à chacune des descriptions suivantes ?

a) E est le seul des trois événements mentionnés qui se réalise ;
b) au moins l'un de ces événements se réalise ;
c) au plus deux des trois événements se réalisent ;
d) exactement deux de ces événements se réalisent.

Exercice 2. Soient A et B des événements appartenant à une tribu $\mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{F}$ contient les ensembles $A \backslash B$ et $A \triangle B$.
Indication : $A \triangle B$ est la *différence symétrique*, c'est-à -dire l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, mais pas aux deux à la fois.

Exercice 3. On considère l'expérience (de pensée) qui consiste à lancer une pièce une infinité de fois. Pour $k \in \mathcal{N}^*$, on note A_k, l'événement : "le k-ième lancer est pile". Ecrire, à l'aide de A_k, l'événement A_∞ : "à partir d'un certain lancer, on n'obtient plus que des piles".

Exercice 4. Une expérience consiste à jeter un dé équilibré de manière répétée avec pour résultat le nombre de jets avant l'apparition d'un premier trois.

a) Définir l'espace fondamental Ω qui correspond à ce résultat.
b) Pour $k \geq 0$, soit A_k l'événement : "il faut k jets avant que (au jet $k+1$) le premier TROIS apparaisse". Calculer $\Pr(A_k)$, la probabilité de l'événement A_k, et $\sum_{k \geq 0} \Pr(A_k)$.
c) Soient E_p et E_i, les événements : "le nombre de jets avant le premier TROIS est pair, resp. impair".
    i) Exprimer E_p à l'aide des A_k et calculer $\Pr(E_p)$.
    ii) Calculer $\Pr(E_i)$.

Exercice 5. On considère une suite d'événements $\{A_i, i \geq 1\}$, montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Exercice 6. Quelle est la probabilité que la sélection aléatoire d'une des options ci-dessous soit la réponse correcte à cette question :

a) 1/4, b) 1/2, c) 1, d) 1/4 ?

Série 3

Exercice 7. Soient des événements E_i, $i = 1, 2, 3$, définis sur le même espace de probabilité avec $\Pr(E_i) = 1/4$. Soit E_0 l'événement “au moins un des E_i se produit".

a) Calculer $\Pr(E_0)$ lorsque (pour $i = 1, 2, 3$) :
   i) les événements E_i sont disjoints.
   ii) les événements E_i sont indépendants.
   iii) les événements E_i correspondent en fait au même événement (trois notations pour le même événement).

b) Trouver la valeur maximale que peut prendre $P(E_0)$ quand :
   i) on ne connaît rien de l'indépendance ou du caractère disjoint des E_i.
   ii) on sait que les E_i sont *indépendants deux-à-deux* i.e. que la probabilité de réaliser à la fois E_i et E_j est $\Pr(E_i)\Pr(E_j)$, $1 \leq i \neq j \leq 3$ (mais rien n'est connu à propos de la probabilité de réaliser les trois événements à la fois).

iii) Supposons que les E_i ont chacun la probabilité p, qu'ils sont indépendants deux-à-deux et que E_0 a probabilité 1. Montrer que p vaut au moins 1/2.

Exercice 8. Combien d'arrangements différents peut-on former avec les lettres des mots

vélos, papier, banane, minimum ?

Exercice 9. (a) En calculant de deux façons différentes le nombre de manières de constituer une classe d'étudiants avec un délégué de classe à partir d'un groupe de n étudiants, établir l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1} .$$

(b) Utilisant que des mots (sans algèbre), expliquer pourquoi

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}, \quad \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j} = \binom{m+n}{r}.$$

Exercice 10. Un examen consiste à répondre à un ensemble de questions à choix multiples, chacune ayant cinq choix de réponses proposées (seule une réponse est correcte). Supposons que vous devez passer l'examen et que, pour chaque question, vous estimez à 3/4 votre probabilité de connaître la réponse. Si vous ignorez la réponse, vous décidez que vous cocherez une réponse au hasard. Quelle est la probabilité que vous répondrez correctement à une question donnée ?

Exercice 11. Une urne contient r boules rouges et b boules bleues, $r \geq 1$, $b \geq 3$. Trois boules sont tirées au hasard sans remplacement. En utilisant la notion de probabilité conditionnelle pour simplifier le problème, trouver la probabilité de tirer dans l'ordre une boule bleue, une boule rouge et enfin, une boule bleue.

Exercice 12. Lors d'un jeu télévisé sur l'écologie, un candidat est placé devant trois portes fermées. Deux d'elles cachent des voitures rouges et polluantes, l'autre une chèvre élégante et de bon caractère. Le candidat doit d'abord désigner une porte. Le présentateur (qui connaît l'emplacement de la chèvre) ouvre une autre porte derrière laquelle la chèvre ne se trouve pas. Enfin, le candidat a le choix entre ouvrir la troisième porte (celle que le présentateur a laissée fermée) ou celle qu'il a désigné plus tôt. Qu'a-t-il intérêt à faire ?

La réponse change-t-elle si le présentateur lui-même ne connaît pas l'emplacement de la chèvre ?

Série 4

Exercice 13. La probabilité pour que la durée de vie d'un composant dépasse 10 000 heures est de 80% et on admet que les pannes des différents composants sont indépendantes.

a) Avec 3 composants, on réalise un montage "en série". Il suffit que l'un des composants tombe en panne pour que le système ne fonctionne plus. Quelle est la probabilité pour que celui-ci fonctionne au moins 10000 heures ?

b) Avec les mêmes composants que précédemment, on réalise un deuxième montage "en parallèle". Dans ce cas pour que le système ne fonctionne plus il faut que tous les trois composants soient en panne.

   i) Quelle est la probabilité pour que le système fonctionne au moins 10000 heures ?

   ii) Sachant que le système, qui a été sous tension 10000 heures, est en état de fonctionnement, quelle est la probabilité qu'un composant au moins soit défectueux ?

Exercice 14. Soient $n \in \mathcal{N}$ et $\Pr(X = x) = c2^x$, $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Trouver la valeur de c telle que Pr soit une fonction de probabilité.

Exercice 15. On jette deux dés équilibrés indépendents. Soit X le produit des deux résultats. Trouver sa loi.

Exercice 16. Une machine peut être équipée de 2 ou 4 composants, chaque composant fonctionnant indépendamment des autres. Soient p la probabilité qu'un composant tombe en panne et X_1 et X_2, les variables aléatoires représentant le nombre de composants en panne lorsque la machine est équipée de $n_1 = 2$ resp. $n_2 = 4$ composants. La machine est en panne si plus de la moitié des composants sont hors de fonction. Pour chaque situation $i = 1, 2$,

a) calculer la fonction de densité des X_i en l'exprimant en fonction de k o $0 \leq k \leq n_i$;

b) calculer la probabilité p_i que la machine ne fonctionne plus.

Exercice 17. Pour les lois suivantes, vérifier que somme des probabilités vaut 1 : (a) la loi de Poisson avec paramètre λ ; (b) la loi binomiale négative de paramètres (r, p).

<u>Indications</u> :

1. Noter que : $(1-x)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} x^j$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $|x| < 1$.
2. On donne les loi suivantes :
   — Poisson (λ) : $\Pr(X = n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$, $n \in \mathcal{N}, \lambda > 0$;
   — binomiale négative (r, p) : $\Pr(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$, $n = r, r+1, \ldots, r \in \mathcal{N}^*, 0 < p \leq 1$.

Exercice 18. Cet exercice présente la démarche permettant de simuler des nombres aléatoires selon une loi donnée.

a) Comment générer une variable aléatoire uniforme à partir d'une suite de variable Bernoulli ? <u>Indication</u> : penser à une combinaison linéaire de variables Bernoulli et au développement en base 2.

b) Comment générer une variable aléatoire de loi arbitraire à partir d'une variable aléatoire uniforme ?

Série 5

Exercice 19. Soient $A, B, A_1, \dots, A_n$ des événements définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$, et soit $I_A, I_B, I_1, \dots, I_n$ les variables indicatrices correspondantes.

a) Démontrer que $\mathrm{E}(I_A) = \Pr(A)$.

b) Démontrer que $I_{A\cap B} = I_A I_B$ et que $I_{A\cup B} = 1 - (1 - I_A)(1 - I_B)$.

c) Démontrer que $I_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - I_j)$, et en déduire la formule d'inclusion-exclusion.

d) Soient A_j les événements 'face au $j$ième essai', dans une série de n lancers indépendants d'une pièce avec probabilité de face p. Donner la loi de $I_1 + \cdots + I_n$ et trouver son espérance.

e) Soient A_j les événements 'la $j$ième boule est blanche' quand je tire m boules au hasard et sans remise d'une boîte contenant b boules blanches et n boules noires. Donner la loi de $I_1 + \cdots + I_m$ et trouver son espérance.

Exercice 20. Pendant un tour d'Ireland à vélo j'achète six boîtes de nourriture, deux de soupe, deux de ragoût et deux de fruit. Il pleut averse, et les boîtes perdent leurs étiquettes et deviennent indistinguables. Si j'en choisi trois au hasard pour mon repas du soir, trouver la distribution du nombre de boîtes de fruit que j'ouvre. Quelle est la probabilité que j'ouvre une boîte de chaque type de nourriture ?

Exercice 21. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $\Pr(X = x_j) = p_j$ $(j = 1, \dots, n)$. On définit l'*entropie* de X par $h(X) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \ln p_j$. Remarquons que $0 \ln 0 = 0$.

a) Calculer $h(X)$ si X est constante.

b) Calculer $h(X)$ si X est équi-distribuée.

c) Trouver l'entropie maximale si le support S_X contient n valeurs.

Exercice 22. Soit X une variable aléatoire discrète avec support $1, 2, \dots$. Montrer que $\mathrm{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \Pr(X \geq x)$ si l'espérance existe.

a) En déduire l'espérance d'une variable aléatoire de loi géométrique.

b) Avant de commencer la procédure de naturalisation, vous devez collectionner un exemplaire de chacune de n figurines de politiciens suisses renommés. Chaque boîte de votre muesli préféré contient une figurine, et les figurines sont équiprobables. La loi vous interdit d'échanger de figurines avec vos amis ou d'en acheter sur le marché noir. Quelle est l'espérance du nombre de boîtes de muesli que vous devrez manger avant d'entamer la procédure ?

Exercice 23. Le professeur Tournesol propose à Dupond et Dupont le jeu suivant. Il a deux enveloppes identiques, dont l'une contient un billet de banque et l'autre une coupure dont la valeur est le double du premier billet. Tournesol lance une pièce non truquée pour décider quelle enveloppe donner à Dupond, l'autre enveloppe étant remise à Dupont. Les Dupond et Dupont ont le droit d'échanger leurs enveloppes s'ils veulent. Dupond raisonne que si son enveloppe contient a, alors l'autre contient soit $2a$, soit $a/2$, avec probabilité $1/2$. Donc, suite à un échange des enveloppes, l'espérance de son gain sera $(2a + a/2)/2 > a$. Il conclut qu'il lui est avantageux d'échanger avec Dupont, lequel fait le même raisonnement et accepte l'échange. Ont-ils raison ?

Série 6

Exercice 24. Soit X une variable géométrique de probabilité $p > 0$ correspondant au nombre de lancers d'une pièce avant d'obtenir un premier succès. Démontrer que $\mathrm{E}(X) = 1/p$, $\mathrm{var}(X) = (1-p)/p^2$:

a) en conditionnant sur le résultat du premier lancer pour obtenir $\mathrm{E}(X) = 1 + (1-p)\mathrm{E}(X)$, avec une équation semblable pour $\mathrm{E}(X^2)$;

b) à l'aide des dérivées de l'équation $\sum_{x=0}^{\infty} u^x = 1/(1-u)$, ($|u| < 1$).

Exercice 25. a) Soit I_A une variable indicatrice, calculer $\mathrm{var}(I_A)$.

b) Soit $X \sim B(n,p)$, démontrer que $\mathrm{E}\{X(X-1)\} = n(n-1)p^2$, et ainsi trouver $\mathrm{var}(X)$.

c) Quel est le lien entre a) et b) ?

Exercice 26. Une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ a pour fonction de densité $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-z^2/2)$ et pour fonction de répartition $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(x)\,\mathrm{d}x$ ($z \in \mathbb{R}$).

a) Trouver $\phi'(z)$ et $\phi''(z)$ et ainsi démontrer que $\mathrm{E}(Z) = 0$, $\mathrm{var}(Z) = 1$.

b) Trouver les fonctions de répartition et de densité de $X = \mu + \sigma Z$, et son espérance et variance.

c) Démontrer que $\mathrm{E}(Z^{2m+1}) = 0$, $\mathrm{E}(Z^{2m}) = (2m-1)\cdot(2m-3)\cdots 3\cdot 1$, pour $m \in \{1, 2, \ldots\}$.
(*Indication :* $z^r = z \times z^{r-1}$.)

d) Démontrer que $\phi(z) = \phi(-z)$ et $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$, et en déduire que les quantiles z_p de Z satisfont $z_p = -z_{1-p}$ ($0 < p < 1$). Trouver les quantiles x_p de X en terme de celles de Z.

e) Démontrer que $\mathrm{E}(X \mid X > a) = \mu + \sigma\phi(b)/\{1 - \Phi(b)\}$, où $b = (a-\mu)/\sigma$.

f) Utiliser la table pour trouver $\Pr(Z \leq 0.53)$, $\Pr(Z \leq -1.86)$, $\Pr(-1.86 < Z \leq 0.53)$, $z_{0.95}$, $z_{0.025}$, $z_{0.5}$.

Exercice 27. Albert doit passer un examen d'entrée pour être admis aux études de physique à l'ETHZ. Les résultats de cet examen sont normalement distribués avec une moyenne de 50 et une déviation standard de 20. Albert sait que pour être admis, il doit obtenir des résultats meilleurs qu'au moins 70% des élèves qui passent le test.

a) Albert passe l'examen et obtient une note de 67. Sera-t-il admis ?

b) Albert est informé qu'il a été admis. Quelle est alors la meilleure estimation de son score ?

Exercice 28. Le capitaine Haddock a une boîte d'allumettes dans chacune des poches de sa veste, une du côté droit et une du côté gauche. Chacune des deux boîtes contiennent initialement m allumettes. Chaque fois qu'il allume sa pipe, Haddock choisit une boîte au hasard et jette l'allumette utilisée. Après un moment, il constate que la boîte qu'il a choisie est vide. Quelle est alors la distribution du nombre d'allumettes dans l'autre boîte ?

(*Indication : calculer d'abord les probabilités quand le nombre restant dans l'autre boîte est* 0 *ou* m.)

Série 5

Exercice 29. The mechanics at Isaac's garage want to replace a car gearbox but know that they are often copied and sold as original pieces. Assume a probability $1/4$ of buying a pirated gearbox, and a probability $3/4$ of buying an original one. The lifespan of a gearbox is an exponential random variable, with λ_1 for a pirated one and parameter λ_2 for an original, where $\lambda_2 < \lambda_1$. Let T denote the lifespan of the gearbox that they install, and suppose that it it is still working at time t after it was installed. What is the probability $p(t)$ that it was pirated ? Find the limit of $p(t)$ when $t \to \infty$. Discuss.

Exercice 30. Une station service est approvisionnée en essence une fois par semaine. Supposons que le volume d'essence X potentiellement vendu (en unité de $10'000$ litres) a pour fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} 6(x-2)(3-x), & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Calculer l'espérance et la variance de cette loi.

b) Quelle capacité doit avoir le réservoir pour que, sur une semaine donnée, la probabilité qu'il soit vidé soit de 5% ?

Exercice 31. Trouver les fonctions de densité de

a) $Y = |X|$ quand (i) $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, (ii) X suit la loi de Laplace avec $\eta = 0$, $\tau = 1$;

b) $Z = 1/X$ quand $X \sim \exp(\lambda)$.

Exercice 32. In finance the level of a risk of a portfolio is often measured by the value-at-risk, i.e., the loss that is exceeded with probability α, or by the expected shortfall, which is the expected loss, conditional on the loss exceeding the value at risk. Find the value-at-risk and the expected shortfall if

a) the loss distribution is exponential with mean μ ;

b) the loss distribution is normal with mean 0 and variance σ^2.

c) Discuss the properties of the expected shortfall minus the value-at-risk as $\alpha \to 0$ in a) and b).

Hint : The approximation $1 - \Phi(x) \sim \phi(x)(1/x - 1/x^3 + \cdots)$ as $x \to \infty$, could be useful in c).

Série 8

Exercice 33. Trouver les fonctions de densité de

a) $W = \max(U_1, \ldots, U_n)$ quand $U_1, \ldots, U_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1)$;

b) $V = \min(X_1, \ldots, X_n)$ quand $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \exp(\lambda)$.

Exercice 34. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes Bernoulli de probabilité p.

a) Trouver la fonction génératrice des moments de X_1.

b) Trouver la fonction génératrice des moments de $X_1 + \cdots + X_n$.

c) Trouver la fonction génératrice des moments de $Y \sim B(m, q)$.

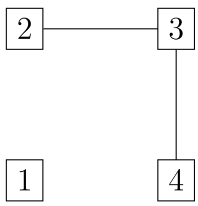
d) Comparer b) et c), et discuter.

Exercice 35. On s'intéresse à comparer la taille des hommes et des femmes pour une population ayant les caractéristiques suivantes : la taille d'un homme sélectionné de manière aléatoire suit une loi normale d'espérance 178 cm et de variance 64 cm^2, et la taille d'une femme sélectionnée de manière aléatoire suit une loi normale d'espérance 165 cm et de variance 49 cm^2.

a) Quelle est la probabilité qu'une femme soit plus grande que la moitié des hommes, pour cette population ?

b) Je choisis un homme et une femme au hasard de leurs populations respectives. Quelle est la probabilité que la femme soit plus grande que l'homme ?

Exercice 36. Dans le réseau ci-dessous, $X_{i,j} = 1$ s'il y a un lien entre les sommets i and j, sinon $X_{i,j} = 0$ $(1 \leq i < j \leq 4)$. On a $X_{2,3} = X_{3,4} = 1$.



Soient $X_{1,2}$, $X_{1,3}$, $X_{1,4}$, $X_{2,4}$ des variables de Bernoulli indépendantes de probabilité $p = 1/2$, soit S le nombre de liens en plus de ceux dans le graphique, et soit T le nombre de triangles,

$$S = X_{1,2}+X_{1,3}+X_{1,4}+X_{2,4}, \quad T = X_{1,2}X_{2,3}X_{3,1}+X_{1,2}X_{2,4}X_{4,1}+X_{1,3}X_{3,4}X_{4,1}+X_{2,3}X_{3,4}X_{4,2}.$$

(a) Combien de configurations existe-t-il ? Compléter la table ci-dessous et ainsi trouver la fonction de masse conjointe de S et T.

s	0	1	1	2	2	3	3	3	4
t	0	0	1	0	1	0	1	2	4
Number of configurations		3			5	0			1

(b) Trouver les fonctions de massse marginales de S et de T. Sont-elles indépendantes ?

(c) Calculer l'espérance de S quand $T = 1$.

Série 9

Exercice 37. (a) Soient $A, B \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, trouver la fonction de densité de la racine de $A + Bx = 0$.

(b) Soient $B, C \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1)$, trouver la probabilité que $x^2 + Bx + C = 0$ ait deux racines réelles.

Exercice 38. (a) Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, démontrer que $\text{cov}(X,Y) = 0$.

(b) Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1), Y = X^2 - 1$, démontrer que $\text{cov}(X,Y) = 0$ mais $X \not\perp\!\!\!\perp Y$. Y-a-t il une contradiction avec le théorème 104(c) ?

Exercice 39. La *corrélation* de deux variables aléatoires X and Y de variances positives est définit comme

$$\text{corr}(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\{\text{var}(X)\text{var}(Y)\}^{1/2}}.$$

Soient a, b, c, d des constantes réeles.

(a) Calculer $\text{var}(a + bX + cY)$ et démontrer que $|\text{corr}(X,Y)| \leq 1$, avec égalité si et seulement si il existe une relation linéaire entre X et Y.

(b) Démontrer que $\text{cov}(a + bX, c + dY) = bd\,\text{cov}(X,Y)$, et ainsi déduire que

$$\text{corr}(a + bX, c + dY) = \text{sign}(bd)\text{corr}(X,Y).$$

(c) Les temperatures journalières moyennes (°F) à New York et Chicago ont pour corrélation 0.6. Donner la corrélation entre les moyennes correspondantes en Celsius. Que pouvez-vous dire des covariances ?

Exercice 40. Soit T le nombre moyen d'heures en dehors des cours et des séances d'exercices qu'un étudiant en physique passe à étudier chaque semaine pendant sa première année à l'EPFL, et soit N sa note moyenne aux examens de première année. Supposons que T et N ont une distribution normale bivariée avec des moyennes respectives de 10 et 4, des variances respectives de 25 et 1, et une covariance de 4.

(a) Erwin ne travaille en moyenne que 5 heures par semaine sans horaire fixe. Donnez la répartition de sa note moyenne N. Quelle est la probabilité que $N < 4$?

(b) Max veut atteindre une moyenne de 5. Combien d'heures supplémentaires devrait-il travailler chaque semaine, pour que sa valeur de N ait une valeur médiane de 5 ?

(c) Werner veut avoir une probabilité de 0.9 de réussir sa première année. Combien d'heures supplémentaires devrait-il travailler chaque semaine, en moyenne ?

Série 10

Exercice 41. Un serveur reçoit des requêtes de 8 lignes de communication. Le nombre de requêtes issues d'une quelconque de ces lignes est en moyenne de 20 requêtes par seconde. On suppose que le nombre de requêtes est indépendant de la ligne. On souhaite savoir si le nombre total de requêtes reçues par le serveur n'excède pas le seuil critique de 500 requêtes par seconde.

(a) Utiliser l'inégalité de Markov pour obtenir un majorant de cette probabilité.

(b) Qu'obtenez-vous en utilisant l'inégalité de Chebyshov ?

Exercice 42. Un logiciel contient une section d'initialisation A, une section de calcul B composée de 100 cycles de calcul identiques et indépendants, et une section finale C. On a enregistré les temps de calcul du programme pour chacune des trois sections. Le tableau suivant résume les temps de calcul obtenus.

Section	Temps moyen (ms)	Déviation standard (ms)
Initialisation A	5.5	2.5
Calcul B (composé de 100 cycles)	3.4	2.6
Finalisation C	4.5	1.3

Tous les temps sont indépendants exceptés ceux des sections A et C dont la corrélation vaut 0.2.

(a) Calculer la covariance des temps des cycles A et C.

(b) Calculer la moyenne et la variance du temps d'exécution total T du programme.

(c) Les temps des sections A et C sont normalement distribués. Bien que le temps de calcul d'un cycle de la section B ne soit pas normalement distribué, expliquer pourquoi la distribution du temps total de la section B (qui comporte 100 cycles) peut être approximée par une loi normale et préciser les paramètres de cette distribution.

(d) Calculer la proportion des cas pour lesquels le logiciel prend (i) moins de 10 ms, (ii) plus de 20 ms.

Exercice 43. Arrondir $n = 50$ réels au entier le plus proche. Si les erreurs d'arrondissement sont uniformément distribuées sur $(-0.5, 0.5)$, donner la probabilité que la moyenne des entiers diffère de la moyenne des réels de plus que 0.1. Comment choisir n pour réduire cette probabilité à ε ?

Exercice 44. Soient $\{X_j\}$ des variables aléatoires indépendantes d'espérance μ et de variance finie σ^2, soit $\overline{X} = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} X_j$, et soit g une fonction dérivable telle que $g'(\mu) \neq 0$.

(a) Donner la loi approchée de $Z_n = (\overline{X} - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n}$, et ainsi montrer que

$$g(\overline{X}) = g(\mu + \sigma Z_n/n^{1/2}) \dot{\sim} \mathcal{N}\{g(\mu), \sigma^2 g'(\mu)^2/n\}$$

pour n grand.

(b) Trouver la loi approchée de $2\overline{X}^{1/2}$ quand les X_j suivent une loi de Poisson.

(c) Trouver la loi approchée de $1/\overline{X}$ quand X_j suivent une loi gaussiènne. Attention au cas $\mu = 0$!

Série 11

Exercice 45. Soient $Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $p \in (0,1)$, alors la quantile empirique $Y_{(\lceil np \rceil)} \xrightarrow{P} y_p$ quand $n \to \infty$, où y_p dénote le quantile théorique correspondant.

(a) Démontrer que

$$M = Y_{(\lceil n/2 \rceil)} \xrightarrow{P} \mu, \quad \text{IQR} = Y_{(\lceil 3n/4 \rceil)} - Y_{(\lceil n/4 \rceil)} \xrightarrow{P} 1.35\sigma, \quad n \to \infty.$$

(b) Les limites de M et de IQR sont-elles des paramètres du modèle ?

(c) Pour n très grand, montrer que la proportion des données gaussiennes à l'extérieure des moustaches d'un boxplot est approximativement 0.7%.

(d) Répéter a) et c) pour un échantillon aléatoire provenant d'un loi exponentielle.

Exercice 46. Dans l'exemple 132 du cours, supposons que la variance d'un individu qui reçoit le placebo est σ_P^2 et que celle d'un individu qui reçoit le traitement est $\sigma_T^2 = \rho^2\sigma_P^2$, où $\rho > 0$. Trouver alors le choix des n_1 et n_2 qui minimise la variance de la différence $D = \overline{X}_T - \overline{X}_P$. Si $n = n_T + n_P = 200$ et $\rho = 2$, donner les n_T et n_P optimaux.

Exercice 47. a) Quel est le point de rupture de la moyenne tronquée de données $y_1, \ldots, y_n$, c'est-à-dire

$$\overline{y}_\alpha = \frac{1}{\lceil n(1-\alpha) \rceil - \lceil n\alpha \rceil + 1} \sum_{j=\lceil n\alpha \rceil}^{\lceil n(1-\alpha) \rceil} y_{(j)}, \quad 0 \le \alpha < 0.5?$$

Que est-ce qui se passe quand $\alpha = 0$, $\alpha \to 0.5$?

b) Quel est le point de rupture du coéfficient de la corrélation ? Trouvez-vous que la définition du point de rupture est adaptée à cette statistique ?

Exercice 48. Supposons que les valeurs d'une propriété des individus d'une population finie de taille N sont $x_1, \ldots, x_N$, dont je veux estimer la moyenne $\overline{x} = n^{-1}\sum_{j=1}^N x_j$. Pour ce faire, je prends au hasard et sans replacement un échantillon $y_1, \ldots, y_n$, dont je calcule la moyenne $\overline{y} = n^{-1}\sum_{j=1}^n y_j$. Sous un modèle probabiliste de cette expérience, $\overline{y}$ est une réalisation de

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^N x_j I_j, \quad I_j = I(\text{individu } j \text{ est selectionné});$$

noter que $\sum_{j=1}^N I_j = n$.

a) Les I_j sont-elles indépendantes ?

b) Démontrer que

$$\mathrm{E}(I_j) = \frac{n}{N}, \quad \mathrm{var}(I_j) = \frac{n(N-n)}{N^2}, \quad \mathrm{cov}(I_i, I_j) = -\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}, \quad i \ne j.$$

Vous semble-t-il intuitif que la covariance est négative et que $\mathrm{corr}(I_i, I_j)$ diminue avec N ?

c) Démontrer que

$$\mathrm{E}(\overline{Y}) = \overline{x}, \quad \mathrm{var}(\overline{Y}) = (1-f)n^{-1}s^2, \quad s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^N (x_j - \overline{x})^2,$$

où $f = n/N$ s'appelle la fraction de l'échantillonnage (sampling fraction). Vous semble-t-il intuitif que $\mathrm{var}(\overline{Y})$ diminue en fonction de n ?

Série 12

Exercice 49. Soient $U_1, \dots, U_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1)$, et $U_{(1)} < \cdots < U_{(n)}$ leur statistiques d'ordre.

a) Expliquer pourquoi $U_{(r)} \leq u$ si et seulement si au moins r des événements $U_j \leq u$ arrivent, et en déduire que

$$\Pr(U_{(r)} \leq u) = \sum_{j=r}^{n} \binom{n}{j} u^j (1-u)^{n-j}, \quad 0 < u < 1,$$

et que la fonction de densité de $U_{(r)}$ est

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} u^{r-1}(1-u)^{n-r}, \quad 0 < u < 1.$$

b) Démontrer que

$$\mathrm{E}(U_{(r)}) = \frac{r}{n+1}, \quad \mathrm{var}(U_{(r)}) = \frac{r(n+1-r)}{(n+1)^2(n+2)}, \quad r = 1, \dots, n.$$

Vous semble-t-il intuitif comment les $\mathrm{E}(U_{(r)})$ divisent l'intervalle $(0,1)$?

c) Soient $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} F$ des variables absolument continues, démontrer que X_j et $F^{-1}(U_j)$ ont la même loi de probabilité, et en déduire que $\mathrm{E}(X_{(r)}) = \mathrm{E}\{F^{-1}(U_{(r)})\}$.

d) Si F^{-1} possède deux dérivées continues et en écrivant

$$F^{-1}(U_{(r)}) = F^{-1}[p_n + (n+2)^{-1/2}\{p_n(1-p_n)\}^{1/2}\varepsilon],$$

où

$$p_n = \frac{r}{n+1}, \quad \varepsilon \sim (0,1),$$

démontrer que

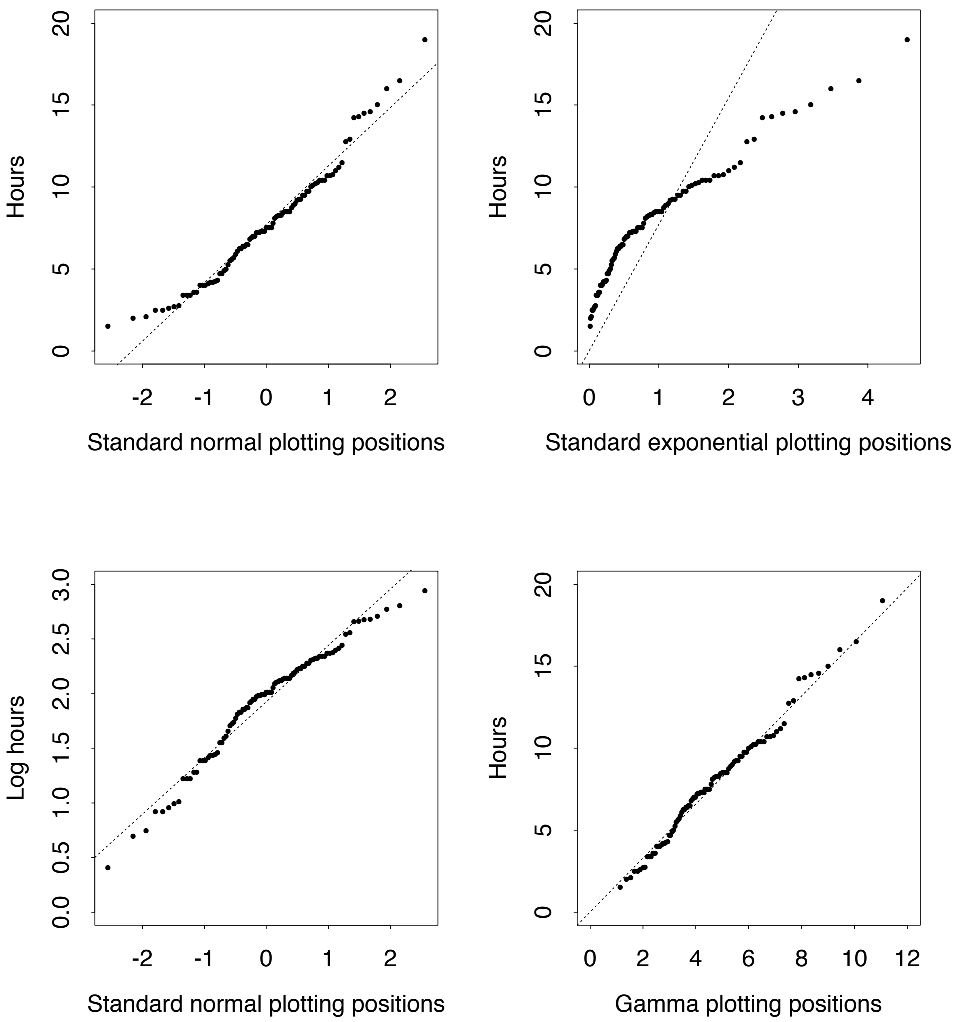
$$\mathrm{E}(X_{(r)}) = F^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right) + O(n^{-1}).$$

Justifier ainsi la choix des ordonnées dans un Q-Q plot.

e) J'aimerais vérifier si un échantillon $y_1, \dots, y_n$ provient de la loi exponentielle de paramètre λ. Expliquer comment construire le Q-Q plot approprié. Comment peut-on estimer λ à partir du graphique ?

f) Le graphique ci-après montre des Q-Q plots pour les temps passés dans une salle d'accouchement pour 95 femmes. Commenter.

Indication pour b) : $\int_0^1 u^a(1-u)^b \mathrm{d}u = a!b!/(a+b+1)!$, pour des entiers positifs a, b.



Exercice 50. Afin de tester si une pièce est biaisée, on la lance n fois indépendamment, donnant $y_1, \ldots, y_n$, où $y_j = 1$ si on observe 'face' sur le $j$ème lancer et $y_j = 0$ sinon.

a) Décrire un modèle statistique pour cette expérience, et énoncer une hypothèse nulle H_0 à tester.

b) Vous semble-t-il que $S = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ soit une statistique appropriée pour tester H_0 ? Sinon comment faut-il la modifier ? Donner la loi de S sous H_0, et ainsi trouver une p-valeur approchée.

c) J'ai fait tourné une pièce de 5 Fr 200 fois et observé 115 faces. La pièce est-elle equilibrée ?

Série 13

Exercice 51. Gregor Mendel élève des petits pois. Sa théorie prédit que 9/16 de sa population de petits pois seront jaunes et ronds, que 3/16 seront jaunes et ridés, que 3/16 seront vers et ronds et que 1/16 seront verts et ridées. Son échantillon consiste de 556 pois avec 315, 101, 108, 32 petits pois dans chacune de ces catégories. Est-ce raisonnable ?
Indication : Utiliser la table ou la fonction `pchisq` *du logiciel* `R`.

Exercice 52. Sous des conditions standard, le temps moyen d'assemblage de pièces dans une chaîne de montage est de 10 minutes (comprendre : l'espérance de la variable aléatoire correspondante). Le manager conservera le processus de montage actuel (H_0) si l'on n'arrive pas à lui montrer que cette espérance a augmenté (H_1). Sur la base d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de taille $n = 25$, le manager propose deux règles :

A) rejeter H_0 si $\overline{X} > c_1 = 10.65$;

B) rejeter H_0 si $\overline{X} > c_2 = 10.45$.

En supposant que le temps d'assemblage d'une pièce suit une loi normale, plus précisément que les variables aléatoires $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 1.96)$, calculer $\alpha = \Pr_0(\text{rejeter } H_0)$ dans chacun des cas A et B. Donner aussi, dans chaque cas, l'expression de $\beta = \Pr_1(\text{rejeter } H_0)$ en fonction de μ.

Exercice 53. Dans un contexte biologique on test $N = 1000$ hypothèses nulles dont 950 sont vraies. Si l'hypothèse H_j est vraie alors la statistique de test T_j correspondante suit une loi normale standard, mais si H_j est fausse on a $T_j \sim \mathcal{N}(3, 1)$.

a) Trouver le niveau critique $t_{1-\alpha}$ pour tester les H_j au niveau de significativité $\alpha = 0.05$.

b) Trouver ainsi les probabilités de faux positif et de vrai positif.

c) Sachant que $T_j > t_{1-\alpha}$, donner la probabilité qu'il s'agit d'un faux positif.

d) Trouver les espérances des nombres de faux positifs et de vrais positifs. Discuter.

Exercice 54. a) Soient $Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$, utiliser la méthode de moments pour trouver un estimateur de θ.

b) Soient $Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$, c'est-à-dire avec fonction de densité

$$f(y; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\lambda y), \quad y > 0, \quad \alpha, \lambda > 0,$$

démontrer que $\mathrm{E}(Y) = \alpha/\lambda$ et $\mathrm{var}(Y) = \alpha/\lambda^2$, et ainsi trouver les estimateurs des paramètres α et λ par la méthode des moments.

c) Vos estimateurs sont-ils consistants ?

Exercice 55. On suppose que des émissions radioactives ont lieu à des intervalles indépendants et que l'intervalle de temps entre deux émissions est bien modélisé par une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ inconnu. On mesure n intervalles de temps successifs ; l'intervalle de temps du $i$ième intervalle est donné par la valeur d'une variable aléatoire X_i. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ, l'information observée et l'information de Fisher. L'estimateur est-il consistant ?

Série 14

Exercice 56. Un effet secondaire d'un médicament utilisé pour diminuer la pression sanguine d'adultes mâles est une possible augmentation substantielle de poids. On décide de vérifier ce fait en analysant un échantillon de 12 hommes après avoir défini l'augmentation substantielle comme un gain de poids d'au moins 5 livres. On suppose que ce gain de poids suit une loi normale de variance $\sigma^2 = 64$. Les hommes sélectionnés ont tous un poids entre 150 et 175 livres. Les résultats obtenus sont (une valeur négative indique une perte de poids) :

$$15.3 \quad 12.9 \quad -3.2 \quad 16.4 \quad 4.3 \quad 14.6 \quad 15.0 \quad -2.1 \quad 15.5 \quad 7.2 \quad 9.1 \quad 15.2.$$

a) Tester l'hypothèse $H_0 : \mu = 5$, et dire s'il faut la rejeter (pour un seuil $\alpha = 0.05$).

b) Quelle devrait être la taille de l'échantillon si l'on souhaite avoir une puissance $\Pr_1(\text{rejeter } H_0)$ égale à 0.9 lorsqu'en fait l'augmentation du poids est de 10 livres en moyenne.

Exercice 57. Vous disposez d'une baguette de longueur μ. A l'aide de cette baguette, vous dessinez un carré dont la surface est égale à μ^2. Malheureusement, vous ne connaissez pas la longueur μ, et donc vous décidez de l'estimer μ^2 à l'aide de n mesures $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} (\mu, \sigma^2)$.

a) Montrer que $\overline{X}^2 = \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2$ est un estimateur biaisé de μ^2.

b) Déterminer a tel que $\overline{X}^2 - aS^2$ soit un estimateur non biaisé de μ^2, où $S^2 = (n - 1)^{-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2$.

Exercice 58. Dans la population des ménages d'un pays lointain le montant des économies mensuelles X (exprimées en milliers de maravédis) possède la distribution de densité

$$f(x; \lambda) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0,$$

où λ est inconnu. Un échantillon aléatoire de 400 ménages a moyenne $\overline{x} = 2$ milliers de maravédis.

a) Estimer λ en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance.

b) Calculer l'information observée, et donner un intervalle de confidence de niveau 95% pour λ.

b) Oubliant l'erreur d'estimation de λ, quel est le pourcentage des familles qui économisent moins de 1000 maravédis par mois ?

Exercice 59. Soient $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$, où θ est un paramètre inconnu à estimer.

a) Trouver la fonction de vraisemblance $L(\theta)$.

b) Calculer l'estimateur de maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}$.

Indication : esquisser le graphe de $\theta \mapsto L(\theta)$ pour un échantillon donné.

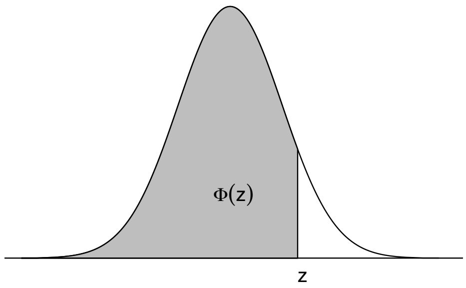
c) Montrer que le biais de $\widehat{\theta}$ est $b(\theta) = -\theta/(n+1)$. Comment modifier $\widehat{\theta}$ afin d'avoir un estimateur non biaisé ?

d) Utiliser la moyenne $\overline{X}$ pour construire un estimateur non biaisé $\tilde{\theta}$ de θ. Est-ce que $\tilde{\theta}$ est meilleur que l'estimateur non biaisé construit à partir de $\widehat{\theta}$? Est-il meilleur que $\widehat{\theta}$?

e) Donner la loi approchée de $\tilde{\theta}$ et ainsi construire un intervalle de confiance pour θ.

f) Un échantillon de $n = 16$ plaques numérologiques vaudoises à pour maximum 523308 et pour moyenne 320869. Calculer un intervalle de confiance (IC) bilatéral de niveau 95% pour le nombre de voitures θ dans l'état de Vaud. Calculer aussi un IC $(0, U)$ pour θ de niveau 95%, et en donner l'interprétation. Est-ce que vous trouvez ce modèle raisonnable ?

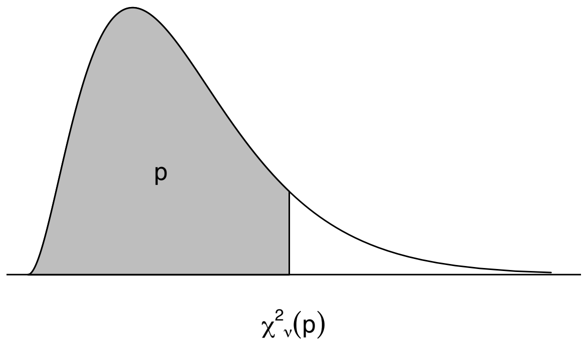
Distribution normale standard $\Phi(z)$



Pour $z < 0$ on utilise symmetrie : $P(Z \leq z) = \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$, $z \in \mathbb{R}$.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56750	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84850	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92786	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Distribution χ^2_ν



Des quantiles $\chi^2_\nu(p)$ pour la distribution en khi-deux à ν degrés de liberté.

ν	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.999
1	0	.0002	.010	.0039	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.	104.	112.