

Noël s'approche, et les assistants du Père Noël travaillent pour que tout soit prêt :

Exercice 14.1

Napoléon le nain essaye de construire un engin dans l'atelier où sont fabriqués les jouets destinés aux enfants sages. Il a besoin de n composants, dont chacun est de type distinct. On lui a donné un gros sac avec le même nombre de chaque type, dont il en tire des composants un par un au hasard jusqu'à ce qu'il y ait un de chaque type. Il remet ceux dont il a déjà un exemplaire. Montrer que l'espérance du nombre qu'il doit tirer avant de pouvoir construire l'engin est $n(1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n)$.

Exercice 14.2

Lothaire le lutin a emballé m jouets, mais il a mis leurs étiquettes au hasard. Trouver l'espérance et la variance du nombre de jouets avec la bonne étiquette.

Exercice 14.3

Gontran le gnome cherche six rennes pour tirer le traîneau du Père Noël, dont deux avec des nez rouges pour mettre devant. Il y a seize rennes dans la forêt, dont quatre ont des nez rouges, Rudolphe inclus. Il décide de tirer au hasard un groupe de taille six parmi les seize, et de relâcher tous les six s'il y a pas exactement deux aux nez rouges dans le groupe. Trouver les probabilités qu'il réussisse au premier essai et qu'il doit prendre au moins trois groupes pour obtenir une bonne équipe. Donner l'espérance du nombre de groupes qu'il doit prendre avant de trouver un avec deux rennes aux nez rouges.

Le Père Noël insiste que Rudolphe soit parmi les six choisis. Sachant que Gontran a déjà trouvé six dont deux aux nez rouges, trouver la probabilité qu'il doit recommencer.

Exercice 14.4

Dagobert le diabolotin prépare le repas de Noël. Il sait que le nombre de pommes de terre que va manger chacun des nains suit une loi de Poisson avec paramètre $\lambda = 4$, et que ces nombres sont indépendants. Montrer que le nombre total de pommes de terre qu'il doit peler est Poissonien, et trouver son espérance.

Indication : démontrer que si X_1, X_2 sont indépendantes et Poissoniennes, alors $X_1 + X_2$ est aussi Poissonienne.

Exercice 14.5

François le farfadet aide le Père Noël à livrer les cadeaux aux enfants sages. Ils visitent 100 maisons, où les parents mettent un verre de cognac pour le Père Noël avec une probabilité de 0.05. Chaque verre augmente de 50mg/100ml le niveau d'alcool dans son sang. La probabilité est de 0.02 qu'un policier le voit et lui demande de faire un alcotest. Trouver la probabilité qu'il soit amené devant le juge pour ivresse en conduisant un traîneau (le seuil est de 80mg/100ml). Sachant qu'il est condamné, donner la loi du nombre de verres qu'il a bu.

Exercice 14.6

Emmanuel l'elfe soupçonne que quelqu'un a mis de l'eau dans le vin pour le repas de Noël. Il en prend seize échantillons indépendants, chacun avec déviation standard de 0.3%, dont le taux moyen de l'alcool est de 13.8%, alors que 14% apparaît sur l'étiquette d'une des bouteilles. A-t-il raison ? Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour le taux moyen actuel.