
INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS

Série 2

Exercice 1. Soient Ω un ensemble quelconque et $\mathcal{F}$ une collection de sous-ensembles de Ω qui est stable sous unions arbitraires dans le sens où si $(E_i)_{i \in I}$ est une collection quelconque de sous-ensembles dans $\mathcal{F}$, alors $\bigcup_{i \in I} E_i \in \mathcal{F}$.

Montrez que si $\mathcal{F}$ contient tous les ensembles $\{x\}$, elle contient nécessairement tous les sous-ensembles de Ω .

Exercice 2. Une manière d'étendre la définition d'une somme à des ensembles non dénombrables est la suivante. Étant donné Ω un ensemble quelconque et une fonction positive $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$, nous définissons la somme $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)$ comme étant égale à $\sup_{\Omega'} \sum_{\omega \in \Omega'} f(\omega')$ où le sup porte sur tous les sous-ensembles finis $\Omega' \subseteq \Omega$.

Montrez que cette somme ne peut être finie que s'il n'y a qu'un nombre au plus dénombrable de ω pour lesquels $f(\omega) > 0$.

Exercice 3. Montrez qu'il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ qui soit invariante par translation, c'est-à-dire telle que pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on ait $\mathbb{P}(A + n) = \mathbb{P}(A)$ ¹.

Exercice 4. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A_1, A_2, \dots$ des événements.

1. Montrez que $\Omega \in \mathcal{F}$ et que $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{F}$.
 2. Montrez que si pour tout $n \geq 1$, on a $A_n \supseteq A_{n+1}$, alors lorsque $n \rightarrow \infty$, il est vrai que $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{k \geq 1} A_k)$.
- ★ Cela est-il valable pour des espaces mesurés généraux ?

Exercice 5. Montrez que, dans les axiomes d'un espace de probabilité, l'additivité dénombrable peut être remplacée par l'additivité finie plus l'énoncé suivant : pour toute suite décroissante d'événements $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \dots$ avec $\bigcap_{i \geq 1} E_i = \emptyset$, nous avons que $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n E_i) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

★ Cela est-il valable dans un espace mesuré général ?

Exercice 6. [Intersection des σ -algèbres] Soient Ω et I deux ensembles non vides. Supposons que pour chaque $i \in I$, $\mathcal{F}_i$ soit une σ -algèbre sur Ω .

- Montrez que $\mathcal{F} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est également une σ -algèbre sur Ω .
- Maintenant, soit $\mathcal{G}$ un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrez qu'il existe une σ -algèbre qui contient $\mathcal{G}$ et qui est incluse dans toute autre σ -algèbre contenant $\mathcal{G}$. Celle-ci est appelée la σ -algèbre engendrée par $\mathcal{G}$.
- Utilisez ceci pour définir une σ -algèbre naturelle sur $[0, 1]$.

0.1 ★ Pour le plaisir (non-examinable) ★

Exercice 7. Soient Ω dénombrable et $\mathcal{F}$ une σ -algèbre sur Ω . Montrez qu'on peut trouver des événements disjoints $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$ tels que pour tout $E \in \mathcal{F}$, on ait $E = \bigcup_{i \in I_E} E_i$.

Exercice 8. [Connexité des graphes aléatoires uniformes] On s'intéresse au modèle d'un graphe aléatoire uniforme : nous considérons l'ensemble de tous les graphes simples sur n sommets, chacun ayant une probabilité égale. On dit qu'un graphe est connexe si pour tous deux sommets v, w , il existe une suite finie de sommets $v_0 = v, v_1, \dots, v_m = w$ telle qu'il y ait une arête entre chaque v_i et v_{i-1} . Montrez que la probabilité que le graphe aléatoire uniforme soit connexe tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$.

1. Ici, comme d'habitude, $A + n = \{a + n : a \in A\}$.