

**INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS**  
**Série 13**

**Exercice 1.** [Problème des moments] Soit  $X$  une variable aléatoire normale standard. Prouver que  $W = \exp(X)$  admet des moments de tout ordre et les calculer. Maintenant, pour  $a > 0$  considérons une variable aléatoire discrète  $Y_a$  avec support

$$S_a = \{ae^m : m \in \mathbb{Z}\}$$

et définie par

$$\mathbb{P}(Y_a = ae^m) = \frac{1}{Z} a^{-m} e^{-m^2/2} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z},$$

où l'on a posé  $Z = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a^{-m} e^{-m^2/2}$  (pourquoi  $Z$  est-elle finie?). Montrer que  $Y_a$  admet des moments de tout ordre et que de plus pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{E}[W^n] = \mathbb{E}[\exp(Xn)] = \mathbb{E}[Y_a^n]$ .

**Exercice 2.** Considérons la variable aléatoire log-normale, i.e.  $Z = \exp(X)$  où  $X$  est une gaussienne standard. Prouvez qu'il n'existe aucun intervalle ouvert autour de 0 tel que  $M_Z(t)$  existe dans cet intervalle, où l'on rappelle que  $M_Z(t) = \mathbb{E}[\exp(tZ)]$ .

**Exercice 3.** Montrez que  $\bar{X}$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\bar{\mu}$  et de covariance  $C$  si et seulement si  $M_{\bar{X}}(\bar{t}) = \exp(\langle \bar{t}, \bar{\mu} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{t}, C \bar{t} \rangle)$ . En déduire que :

- Si  $X$  est une gaussienne standard sur  $\mathbb{R}^n$ , alors il en est de même pour  $OX$ , où  $O$  est une matrice orthogonale  $n \times n$ .
- Le vecteur gaussien de moyenne  $\bar{\mu}$  et de covariance  $C$  sur  $\mathbb{R}^n$  peut être écrit comme  $A\bar{Y} + \bar{\mu}$ , où  $\bar{Y}$  est une gaussienne standard sur  $\mathbb{R}^n$  et  $C = AA^T$  (vous pouvez supposer qu'une telle matrice  $A$  existe, mais vous l'avez vu en algèbre linéaire!).

**Exercice 4.** Soient  $E_1, E_2, \dots$  des événements définis sur le même espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Prouvez que :

- l'ensemble  $\{\omega \in \Omega : \omega \in E_i \text{ pour un certain } i\}$  est mesurable et égal à  $\bigcup_{n \geq 1} E_n$  ;
- l'ensemble  $\{\omega \in \Omega : \omega \in E_i \text{ pour une infinité de } i\}$  est mesurable et donné par  $\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} E_n$  ;
- l'ensemble  $\{\omega \in \Omega : \omega \in E_i \text{ sauf pour un nombre fini de } i\}$  est donné par  $\bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} E_n$ .

Réexprimez ces événements en utilisant les fonctions indicatrices  $1_{E_i}$ .

**Exercice 5.** Soient  $E_1, E_2, \dots$  des événements indépendants de probabilité  $p_i$ . Montrez que  $\mathbb{P}(\bigcup_{i \geq 1} E_i) = 1$  si et seulement si  $\prod_{i=1}^n (1 - p_i) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 6.** [Borel-Cantelli II]

Soit  $E_1, E_2, \dots$  une suite d'événements indépendants définis sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Supposons que  $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(E_n) = \infty$ . Prouvez que presque sûrement une infinité d'événements  $E_i$  se réalisent, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} E_n\right) = 1.$$

Trouvez un contre-exemple dans le cas où les événements ne sont pas indépendants.

## 0.1 ★ Pour le plaisir (non-examinable) ★

**Exercice 7.** [★ Loi du 0 – 1 de Kolmogorov] Soient  $X_1, X_2, \dots$  des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace de probabilités. Supposons que  $E$  soit un événement appartenant à la tribu asymptotique  $\sigma_\infty$ . Prouver qu'alors  $\mathbb{P}(E) \in \{0, 1\}$ . Ici la tribu asymptotique est définie par  $\sigma_\infty := \bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ .

Considérons maintenant  $X_1, X_2, \dots$  une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\{1, -1\}$  et définies sur un même espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Considérons les sommes  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Montrez que l'ensemble  $E_r := \{\omega : \text{pour un certain } i \in \mathbb{Z}, S_n(\omega) = i \text{ pour une infinité de } n\}$  est un événement sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Montrez que sa probabilité est soit 0 soit 1. Que se passe-t-il si nous considérons à la place  $E_0 := \{S_n = 0 \text{ pour une infinité de } n\}$  ?