INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 11

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $(X_n)_{n\geq 1}$ les discrétisations

$$X_n = 2^{-n}\lfloor 2^n X\rfloor = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k2^{-n}\mathbb{1}_{X\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n})}.$$

- Démontrez que pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X_n(\omega) \leq X(\omega) \leq X_n(\omega) + 2^{-n}$ et donc que la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ converge vers $X(\omega)$.
- Ensuite, considérez une variable aléatoire discrète intégrable X avec support S. Montrez que $\mathbb{E}(X) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$, où l'espérance des deux côtés est celle définie pour les variables discrètes, c'est-à-dire
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in S} x\mathbb{P}(X = x).$$
- Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes intégrables et indépendantes. Montrez que XY est intégrable et que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 3. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires intégrables et positives telles que pour un certain $C > 0$, on a $\mathbb{E}X_i < C$ pour tout $i \geq 1$. Montrez que pour tout $\epsilon > 0$, la probabilité que $\sum_{i=1}^N X_i \leq N^{1+\epsilon}$ converge vers 1 lorsque $N \to +\infty$. Que se passe-t-il si on garde l'hypothèse que X_i est intégrable, mais qu'on abandonne l'hypothèse $\mathbb{E}X_i < C$ pour tout $i \geq 1$?

Exercice 4. [Variable Gamma] Pour tout $\lambda > 0, t > 0$, considérez $f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(t)}\lambda^t x^{t-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{x>0}$, où Γ est la fonction Γ d'Euler [1]. Montrez que pour tout $\lambda > 0$, $t > 0$, on a

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(t)}\lambda^t x^{t-1}e^{-\lambda x}dx = 1,$$

et déduisez-en que f_X donne naissance à une variable aléatoire dont la loi est appelée la loi Gamma $Gam(\lambda, t)$. [Indice : commencez par le cas $\lambda = 1$ puis utilisez un changement de variable].

Montrez qu'une variable aléatoire Gamma est intégrable. Quelle est son espérance ? En déduire l'espérance pour la variable aléatoire exponentielle.

Exercice 5. [Une formule utile] Soit X une variable aléatoire à valeurs entières positives. Montrez que X est intégrable si et seulement si $\sum_{i\geq 1}\mathbb{P}(X \geq i)$ est fini, et que dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \sum_{i\geq 1}\mathbb{P}(X \geq i)$.

1. Pour les personnes qui ne la connaîtraient pas encore, la fonction Gamma est définie pour $t > 0$ par la formule intégrale

$$\Gamma(t) := \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\mathrm{d}x.$$

Pour les plus curieux d'entre vous, notons que l'on peut définir un prolongement analytique de Gamma pour t sur le plan complexe, en utilisant la relation fonctionnelle $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, permettant ainsi une extension de la notion de factorielle $n!$ lorsque n n'est plus forcément un entier. La fonction méromorphe ainsi définie admet des pôles sur tous les entiers négatifs et est extrêmement importante dans de nombreux champs de recherche, comme par exemple en théorie conforme des champs puisqu'elle permet de décrire certaines quantités fondamentales dans la compréhension des théories de Liouville et de Toda, cf. les chefs-d'œuvre (en toute humilité et objectivité bien sûr) `https://arxiv.org/abs/2206.06902` et `https://arxiv.org/abs/2208.12085`. Plus sérieusement vous pouvez consulter les pages Wikipédia `https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function` et `https://en.wikipedia.org/wiki/Liouville_field_theory` sur la fonction Gamma et la théorie de Liouville si jamais vous voulez voir encore plus de belles mathématiques !

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire intégrable telle que X^2 soit aussi intégrable. Montrez que pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right]}{t^2}.$$

Trouvez une variable aléatoire X et un t tels que l'égalité soit atteinte.