

A. Exercices standards.

Exercice 9.1. (Courbe comme intersection de deux surfaces). Notons $\mathcal{C} \subset \Omega$ l'ensemble des points de Ω tels que

$$f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0,$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^3$ et $f, g \in C^k(\Omega)$ avec $k \geq 1$. Supposons que pour un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$$

est de rang 2.

- (a) Expliquer pourquoi on peut paramétriser l'ensemble $\mathcal{C}$ dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0) comme courbe régulière $\gamma : I \rightarrow \Omega$ de classe C^k .
 - (b) Que peut-on dire du vecteur tangent $\dot{\gamma}(t)$?
-

Exercice 9.2. Rappelons que par définition une application $f : M \rightarrow N$ entre deux sous-variétés différentiables est un *difféomorphisme* si elle est bijective et f ainsi que f^{-1} sont différentiables.

- (a) Prouver que pour tout $p \in M$, la différentielle $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
 - (b) En déduire qu'il n'existe aucun difféomorphisme entre deux variétés non vides qui n'ont pas la même dimension.
 - (c) Montrer par un exemple qu'une application différentiable bijective $f : M \rightarrow N$ entre deux sous-variétés différentiables n'est pas toujours un difféomorphisme (on peut supposer $\dim(M) = 1$).
-

Exercice 9.3. (a) On a vu à précédemment que $O(n)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. Décrire l'espace tangent $T_I O(n)$ de cette variété au point I (= la matrice identité).

- (b) Prouver que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
 - (c) Décrire l'espace tangent $T_I SL_n(\mathbb{R})$.
-

Exercice 9.4. Une surface est dite *réglée* si c'est une réunion de droites. De façon plus précise, soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe C^1 et $\mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 le long de γ . La surface réglée associée est définie par la paramétrisation:

$$\psi(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{b}(u).$$

- (a) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface réglée ainsi définie soit en effet une surface régulière localement (c'est-à-dire pour que l'application ψ soit une immersion).
- (b) Soit $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathbb{R}^3$. On appelle *cône de sommet* $q \in \mathbb{R}^3$ *et de base* $\mathcal{C}$ la réunion des droites passant par q et un point de $\mathcal{C}$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un cône soit une surface régulière au voisinage de sa base. Puis expliciter une paramétrisation de ce cône.
- (c) Expliquer ce qu'est un ruban de Möbius et donner une paramétrisation de cette surface comme surface réglée dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9.5. Montrer que l'hyperboloïde $\mathcal{H}$ à une nappe $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ est une surface doublement réglée (i.e. réglée de deux manières différentes), puis donner une paramétrisation régulière de cette surface basée sur l'un de ces réglages.

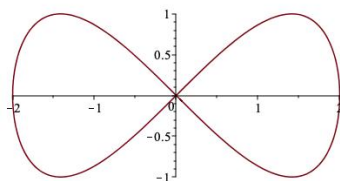
Indication : Ecrire l'équation sous la forme $x^2 - 1 = z^2 - y^2$ et factoriser. En déduire algébriquement l'équation d'une droite contenue dans $\mathcal{H}$, puis la paramétrer et la faire tourner autour de l'axe Oz .

B. Exercice supplémentaire.

Exercice 9.6. Dans cet exercice nous construisons un exemple d'immersion injective qui n'est pas un plongement.

La *lemniscate de Geroni* est la courbe plane définie par l'équation $4x^2 - 4y^2 - x^4 = 0$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 4y^2 - x^4 = 0\}.$$



- (a) Montrer que $\mathcal{C}$ n'est pas une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^2$.
- (b) La restriction de cette courbe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est-elle une sous-variété différentiable ?
- (c) Vérifier que $\gamma : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (2 \cos(t), \sin(2t))$ est une paramétrisation régulière de $\mathcal{C}$.

De façon précise, démontrer que

- (i) γ est une immersion de l'intervalle ouvert $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ dans le plan.
- (ii) γ est injective.
- (iii) γ définit une bijection entre l'intervalle ouvert $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ et la courbe $\mathcal{C}$.
- (iv) Expliquer ce qu'il se passe sur γ lorsque $t \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ et $t \rightarrow +\frac{3\pi}{2}$.
- (v) Prouver que γ n'est pas un plongement de l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ dans le plan. (c'est-à-dire que ça n'est pas un homéomorphisme sur son image).