

**A. Exercices standard.**

**Exercice 7.1.** Le but de cet exercice est de prouver que la différentielle de l'application déterminant  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  en  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est l'application linéaire  $d\det_A : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par la formule

$$d\det_A(H) = \text{Tr}(\text{Cof}(A)^\top H),$$

où  $\text{Cof}(A)$  est la matrice des cofacteurs de  $A$ .

On procède en trois étapes:

- (1) Dans un premier temps démontrer la formule pour le cas  $A = I$ ;
  - (2) Supposer ensuite que  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , i.e. que  $A$  est inversible;
  - (3) Finalement, conclure en utilisant le fait que pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , la matrice  $A + tI$  est inversible pour  $t$  suffisamment petit.
- 

**Exercice 7.2.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière plane de classe  $C^2$  et  $r \geq 0$ . On appelle *courbe parallèle* à  $\gamma$  à distance  $r$  la courbe  $\gamma_r(t) = \gamma(t) + r\mathbf{N}_\gamma(t)$  (où  $\mathbf{N}_\gamma = \mathbf{J}(\mathbf{T}_\gamma)$  est le champ de vecteur normal à  $\gamma$ ).

- (a) Calculer la courbure  $\kappa_r(t)$  de la courbe parallèle  $\gamma_r$  (en fonction de  $r$  et de  $t$ ).
- (b) Montrer que la fonction  $r \mapsto \kappa_r$  satisfait l'équation différentielle de Riccati :  $\frac{\partial \kappa}{\partial r} = \kappa^2$ .
- (c) Supposons que  $q = \inf_{t \in I} \frac{1}{|\kappa(t)|} > 0$ . Montrer que l'application  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(r, t) = \gamma_r(t)$  est une immersion pour tout  $\varepsilon \leq q$ .
- (d) Expliciter le cas du cercle de rayon  $a$  centré en 0.
- (e) Expliquer pourquoi l'affirmation du point (c) n'est pas correcte pour  $\varepsilon > q$ .

Remarque. Cet exercice montre en particulier que localement, dans un voisinage de la courbe, on peut construire un système de coordonnées curviligne dont l'une des coordonnées est l'abscisse curviligne de la courbe et l'autre est la distance orientée à la courbe. Ces coordonnées s'appellent des *coordonnées de Fermi*.

---

**Exercice 7.3.** (a) Le cône  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = (az)^2\}$  est-il une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  (on suppose  $a \neq 0$ ) ?

- (b) Prouver qu'il existe une sous-variété différentiable de  $\mathbb{R}^6$  qui est homéomorphe à  $S^2 \times S^2$  (le produit cartésien de deux sphères).
- (c) Prouver que le groupe linéaire spécial

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

est une sous-variété différentiable de  $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$ . Quelle est sa dimension ?

- (d) (\*) Prouver que le groupe orthogonal  $O(n)$  est une sous-variété différentiable de  $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$ . Quelle est sa dimension ?

Remarque : Les sous-ensembles de  $GL_n(\mathbb{R})$  qui sont à la fois des sous-groupes et des sous-variétés s'appellent les *groupes classiques*. Ce sont des exemples de groupes de Lie (en fait les plus importants). Des exemples de groupes classiques sont  $GL_n(\mathbb{R})$ ,  $SL_n(\mathbb{R})$ ,  $O_n(\mathbb{R})$ ,  $SO_n(\mathbb{R})$ ,  $U_n(\mathbb{C})$ ,  $SU_n(\mathbb{C})$ , et  $SP_{2n}(\mathbb{R})$  (le groupe symplectique).

---

**Exercice 7.4.** (Exercice sur les variétés de type quadrique)

- (a) Rappeler ce qu'est une *forme quadratique* sur un espace vectoriel.
- (b) Soit  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$ . Prouver que  $Q$  est différentiable. Que vaut sa différentielle en un point  $x \in \mathbb{R}^n$  ?
- (c) Que dit le *théorème de Sylvester* de l'algèbre linéaire ? Qu'est-ce que la *signature* d'une forme quadratique ? Que signifie la condition  $Q$  est non dégénéré pour une forme quadratique ?
- (d) Prouver que si  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique non dégénérée, alors l'hypersurface  $Q^{-1}(c)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  pour tout  $c \neq 0$ . Quelle est sa dimension ?
- (e) Est-ce que l'ensemble  $S_0(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$  est une sous-variété ? L'ensemble  $S_0(Q)$  s'appelle le cône isotrope de la forme quadratique  $Q$
- (f) Les hypersurfaces

$$S_+(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = +1\} \quad \text{et} \quad S_-(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = -1\}$$

s'appellent les *indicatrices positives et négatives* de la forme quadratique  $Q$ . Montrer que  $Q$  est entièrement déterminé par les deux indicatrices et le cône isotrope, i.e. si  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux formes quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$  telles que

$$S_0(Q_1) = S_0(Q_2), \quad S_+(Q_1) = S_+(Q_2), \quad S_-(Q_1) = S_-(Q_2),$$

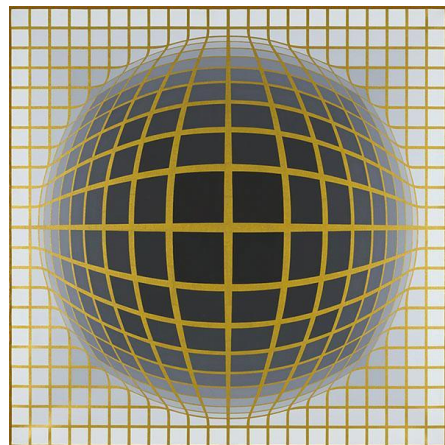
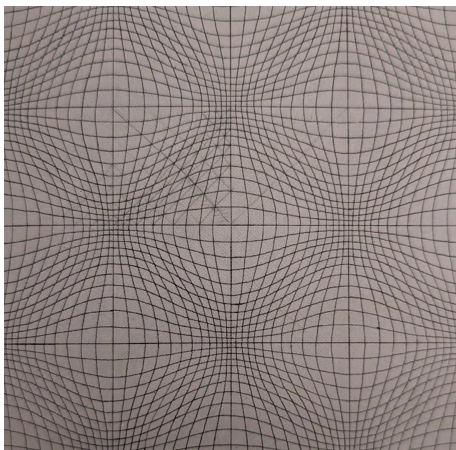
alors  $Q_1 = Q_2$ .

---

**B. Exercices supplémentaires**

**Exercice 7.5.** Cet exercice est à faire en groupe: Les images ci-dessous sont des créations des artistes Maurits Cornelis Escher en 1953 (à gauche) et Victor Vasarely en 1968 (à droite).

Expliquer à votre façon *en quoi on peut interpréter ces images comme représentant des systèmes de coordonnées curvilignes dans un domaine du plan* (discutez entre vous et rédigez un petit essai).



---

**Exercice 7.6.** (\*) On note  $\hat{\mathbb{R}}^n$  l'ensemble  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ , où  $\{\infty\}$  est un point supplémentaire qui n'appartient pas à  $\mathbb{R}^n$ . On définit sur cet ensemble une topologie pour laquelle  $\mathbb{R}^n$  est un ouvert de  $\hat{\mathbb{R}}^n$  et la topologie induite est la topologie usuelle et les voisinages ouverts du point  $\infty$  sont les ensembles du type  $\mathbb{R}^n \setminus K$  où  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ .

On considère ensuite l'application  $f : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = p, \\ p & \text{si } x = \infty, \\ p + k \frac{x - p}{\|x - p\|^2} & \text{si } x \notin \{p, \infty\}. \end{cases}$$

où  $p$  est un point de  $\mathbb{R}^n$  et  $k$  est un réel strictement positif. Cette application s'appelle l'*inversion de centre  $p \in \mathbb{R}^n$  et de module  $k > 0$* , c'est une application qui joue un rôle important en géométrie et en analyse.

Répondre aux questions suivantes :

- (a) Décrire toutes les suites convergentes de  $\hat{\mathbb{R}}^n$  (on ne demande pas de donner une preuve rigoureuse mais seulement d'expliquer quelles sont les suites convergentes).
- (b) Décrire l'ensemble des points fixes de  $f$ , c'est-à-dire l'ensemble  $\{x \in \hat{\mathbb{R}}^n \mid f(x) = x\}$ .
- (c) Prouver que  $f$  est un homéomorphisme de  $\hat{\mathbb{R}}^n$ . Quel est son inverse ?  
Prouver aussi que  $f$  définit par restriction un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$  dans lui-même.
- (d) Prouver que si  $n = 2$ ,  $f$  définit une application anti-holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ .
- (e) Calculer la différentielle  $df_x(h)$  en un point  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ .
- (f) Prouver que  $f$  est une application conforme sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$  (une application est dite *conforme* si elle préserve les angles, concrètement il s'agit de prouver que  $df_x$  est une similitude de  $\mathbb{R}^n$ ).
- (g) Quel est le rapport de similitude de  $df_x(h)$  ?

*Cet exercice est important d'une part parce que l'inversion est une application importante en géométrie, et d'autre part parce qu'il donne l'occasion de s'entraîner au calcul différentiel.*