Les objectifs pour cette série sont les suivants :

- Développer une intuition de la torsion et de la courbure et leur signification géométrique.
- Développer une certaine pratique et des bonnes stratégies pour les calculs géométriques liés aux courbes, en particulier se familiariser avec le repère de Frenet, savoir utiliser les équations de Serret-Frenet et comprendre les conséquences du théorème fondamental.

A. Exercices standards.

Exercice 5.1. Prouver que la courbe $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ est birégulière, puis calculer son vecteur de courbure et sa courbure (la courbure est la norme du vecteur de courbure).

Exercice 5.2. Considérons la courbe

$$\gamma(t) = (\cos(t) + t\sin(t), \sin(t) - t\cos(t), t^2), \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(a) Trouver le ou les points singuliers de cette courbe.

(b) Calculer l'abscisse curviligne $s = s(t)$ de cette courbe depuis le point initial $\gamma(0)$.

Pour les questions qui suivent on se restreint à $t > 0$.

(c) Calculer le vecteur tangent $\mathbf{T}_\gamma(t)$ et le vecteur de courbure $\mathbf{K}_\gamma(t)$.

(d) Quels sont les points biréguliers de γ ?

(e) Calculer la courbure $\kappa_\gamma(t)$ de cette courbe et le vecteur normal principal $\mathbf{N}_\gamma(t)$.

(f) Donner le vecteur binormal $\mathbf{B}_\gamma(t)$ (aux points biréguliers).

(g) Trouver la torsion de γ.

Exercice 5.3. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière de classe C^3. On appelle *vecteur de Darboux* de γ le champ de vecteurs $\mathbf{D}_\gamma$ défini le long de γ par

$$\mathbf{D}_\gamma(u) := \tau_\gamma(u)\mathbf{T}_\gamma(u) + \kappa_\gamma(u)\mathbf{B}_\gamma(u)$$

Montrer que pour tout champ de vecteurs $\mathbf{A}$ le long de γ s'écrivant $\mathbf{A}(u) = a_1(u)\mathbf{T}(u) + a_2(u)\mathbf{N}(u) + a_3(u)\mathbf{B}(u)$, on a

$$\frac{1}{V}\frac{d}{du}\mathbf{A} = \frac{1}{V}\left(\dot{a_1}\,\mathbf{T} + \dot{a_2}\,\mathbf{N} + \dot{a_3}\,\mathbf{B}\right) + \mathbf{D} \times \mathbf{A}.$$

(C'est la *Formule de Darboux*).

Exercice 5.4. Calculer le vecteur de Darboux de l'hélice circulaire droite $\gamma(u) = (a\cos(u), a\sin(u), bu)$.

Exercice 5.5. Considérons la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = (t, t^2 + |t|^3, 0).$$

Montrer que cette courbe est régulière au sens de Frenet mais elle n'est pas de classe C^3 (la définition de la régularité de Frenet se trouve en page 32 du polycopié, édition 2024).
Calculer ensuite le repère de Frenet.

Exercice 5.6. Que peut-on dire d'une courbe (régulière au sens de Frenet) dont la courbure et la torsion sont constantes ?

Exercice 5.7. Montrer que la torsion d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ birégulière de classe C^3 peut se calculer par la formule suivante:

$$\tau(u) = \frac{[\dot{\gamma}(u), \ddot{\gamma}(u), \dddot{\gamma}(u)]}{\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\|^2} = \frac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma}]}{\kappa^2(u) V_\gamma^6(u)}$$

où $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z} \rangle$ représente le produit mixte de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.8. Montrer qu'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ (C^3 et birégulière) est une hélice circulaire droite si et seulement si son vecteur de Darboux est constant.

B. Exercice complémentaire

Exercice 5.9. *On sait qu'à un déplacement près, la géométrie d'une courbe est déterminée par sa courbure et sa torsion. Ceci implique que toute propriété géométrique se traduit en une ou plusieurs équations sur τ et κ. Le but de cet exercice est d'illustrer ceci dans le cas des courbes sphériques (i.e. les courbes tracées sur une sphère).*

(a) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^3 birégulière, de torsion non nulle et paramétrée normalement. Supposons que $\|\gamma(s)\| = r =$ constante. Montrer que pour tout s on a

$$\gamma(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s) + \frac{\dot{\rho}(s)}{\tau(s)}\mathbf{B}(s) = 0,$$

où τ est la courbure de γ et $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ est le rayon de courbure.
En déduire que la fonction

$$s \mapsto \rho(s)^2 + \left(\frac{1}{\tau(s)}\dot{\rho}(s)\right)^2$$

est constante.

(b) Dans le sens réciproque : Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^3 birégulière paramétrée normalement. On suppose que la courbure de γ est croissante et la torsion est non nulle. Démontrer que γ est une courbe sphérique (i.e. elle est tracée sur une sphère) si et seulement si

$$\rho(s)^2 + \left(\frac{1}{\tau(s)}\dot{\rho}(s)\right)^2$$

est constante.
Déterminer ensuite le centre et le rayon de la sphère .