

Dans cette série on avance avec la théorie des courbes (abscisse curviligne, paramétrage naturel). Enfin on approfondit quelques points subtils liés à la notion de longueur.

Exercice 3.1. Exprimer la longueur de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sous forme d'une intégrale (ne pas essayer de calculer cette intégrale, qui ressort de la théorie des *fonctions elliptiques*).

Exercice 3.2. (a) Calculer l'abscisse curviligne de la courbe

$$\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t),$$

depuis le point initial $t_0 = 0$.

(b) Trouver ensuite le paramétrage naturel avec le même point initial.

Exercice 3.3. L'astroïde est la courbe plane d'équation

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1.$$

- (a) Dessiner l'astroïde.
 - (b) Trouver une paramétrisation de l'astroïde
 - (c) Calculer la longueur d'un cycle de l'astroïde.
 - (d) Chercher tous les points singuliers.
 - (e) Calculer l'abscisse curviligne avec point initial en $(1, 0)$.
 - (f) Trouver le paramétrage naturel avec le même point initial.
-

Exercice 3.4. (a) Notons (x, y) les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^2$. Rappeler la définition précise des *coordonnées polaires* (r, θ) , en précisant leur domaine de définition.

(b) Écrire l'équation générale d'une droite en coordonnées polaires, puis l'équation d'un cercle de rayon a et de centre $c = (r_0, \theta_0)$.

(c) Soit $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$ une courbe de classe C^1 écrite en coordonnées polaires. Trouver et prouver une formule donnant sa longueur dans ces coordonnées.

(d) La *spirale logarithmique* est la courbe plane d'équation polaire $r = e^\theta$. Utiliser la formule précédente pour calculer la longueur d'un cycle de cette spirale défini par $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Donner ensuite le paramétrage naturel avec le point $(1, 0)$ comme point initial.

Exercice 3.5. La *conchoïde de Nicomède* est la courbe $\mathcal{C}$ dans le plan euclidien qui est définie de la façon suivante:

On considère un point O dans le plan et une droite D qui ne passe pas par O . Pour tout point p du plan tel que $p \notin D$ et $p \neq O$ on note $f(p) = d(p, q)$ où q est l'intersection de D avec la droite passant par O et p (i.e. $q = (O + \mathbb{R}\overrightarrow{Op}) \cap D$) :

$$\mathcal{C} = \{p \in \mathbb{E}^2 \mid f(p) = b\}.$$

- (a) Dessiner la courbe $\mathcal{C}$. Est-elle connexe ?
 - (b) Donner une équation polaire de cette courbe (on supposera que la droite D est verticale et que le point O est l'origine).
-

Exercice 3.6. Soit $F : I \rightarrow SO(n) \subset M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$ une courbe de classe C^1 à valeurs dans le groupe orthogonal. Prouver que $F(t)^{-1}\dot{F}(t)$ et $\dot{F}(t)F(t)^{-1}$ sont des matrices antisymétriques pour tout $t \in I$.

Exercice 3.7. On rappelle que l'exponentielle $\exp(A)$ d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est définie par la série :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots$$

On admet que cette série converge. On admet aussi que si $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ (la preuve est la même que pour le cas de l'exponentielle d'une somme de deux nombres réels).

- (a) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique, alors $\exp(A) \in SO(n)$.
 - (b) Calculer la matrice $\exp(tJ)$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
-

Exercice 3.8. Prouver l'affirmation suivante ou trouver un contre-exemple : Si $\gamma_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une suite de courbes convergeant uniformément vers la courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (supposée de classe C^1), alors les longueurs convergent, i.e. $\ell(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\gamma_n)$.

Exercice 3.9 (Distance intrinsèque dans un domaine.). Le but est de cet exercice est de définir la notion de *distance intrinsèque* dans un domaine de $\mathbb{R}^n$ (par définition, un *domaine* de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert et connexe).

Soit donc $U \subset \mathbb{R}^n$ et $p, q \in U$. On note $\mathcal{C}_{pq}$ l'ensemble des courbes $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ qui sont continues, de classe C^1 par morceaux et qui relient p à q . On définit alors la *distance intrinsèque* dans U de p à q par

$$\delta_U(p, q) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_{pq}\}.$$

- (a) Prouver que $\mathcal{C}_{pq} \neq \emptyset$ pour tous $p, q \in U$.
- (b) Prouver que $\delta_U(p, q) \geq \|q - p\|$ pour tous $p, q \in U$.
- (c) Prouver que (U, δ_U) est un espace métrique.
- (d) A quelle condition sur le domaine U a-t-on $\delta_U(p, q) = \|q - p\|$ pour tous $p, q \in U$? (donner une condition suffisante).

- (e) Considérons le cas du domaine $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -1 \text{ ou } y \neq 0\}$. Quelle est la distance intrinsèque entre les points $p = (0, 1)$ et $q = (0, -1)$?
Est-ce qu'il existe une courbe de longueur minimale reliant p à q ?

(On dit que $\delta_U(p, q)$ est la *distance intrinsèque* de p à q dans le domaine U et que $d(p, q) = \|q - p\|$ est la distance euclidienne *extrinsèque*).