

Exercice 2.1. Prouver les formules suivantes concernant le produit vectoriel :

Pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$(i) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a} \quad (\text{première identité de Grassmann}),$$

$$(ii) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c} \quad (\text{seconde identité de Grassmann}).$$

$$(iii) \quad \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \quad (\text{identité de Lagrange}).$$

$$(iv) \quad \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle.$$

Indication. En choisissant une base orthonormée bien adaptée au problème, on peut simplifier les calculs.

Exercice 2.2. Montrer que pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$i) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0 \quad (\text{première identité de Jacobi})$$

$$ii) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \quad (\text{deuxième identité de Jacobi}).$$

Exercice 2.3. Le produit vectoriel dans $\mathbb{E}^3$ est-il associatif ?

Exercice 2.4. (a) Rappeler ce qu'est une *similitude* d'un espace vectoriel euclidien.

(b) Prouver que les similitudes d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}^n$ forment un groupe.

(c) Prouver que les isométries forment un sous-groupe normal du groupe des similitudes.

(d) Expliquer pourquoi une similitude qui fixe l'origine $0 \in \mathbb{E}^n$ est une application linéaire.

(e) Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes pour application linéaire inversible $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$:

(i) f est une similitude.

(ii) f préserve les angles, i.e. si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ sont non nuls, alors l'angle entre $f(\mathbf{a})$ et $f(\mathbf{b})$ est égal à l'angle entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

(iii) f préserve l'orthogonalité, i.e. si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ alors $f(\mathbf{a}) \perp f(\mathbf{b})$.

(f) On peut identifier $\mathbb{C}$ au plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une similitude linéaire directe si et seulement si f est la multiplication par un nombre complexe non nul (i.e. on $f(z) = az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$).

Exercice 2.5. Donner un exemple de courbe fermée simple qui est de classe C^1 , mais pas de classe C^2 .

Exercice 2.6. A quelle condition le graphe d'une fonction f représente-t-il une courbe birégulière ?

Exercice 2.7. Par définition, la longueur d'un arc de courbe $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'intégrale $\ell(\alpha) = \int_a^b V_\alpha(u) du$ où $V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\|$ est la vitesse de α .

Calculer la longueur des courbes suivantes :

- (a) $\alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), u)$. $-\pi \leq u \leq \pi$ (la courbe α est une hélice circulaire droite).
 - (b) $\beta(u) = (e^u, e^{-u}, \sqrt{2}u)$. $0 \leq u \leq t$.
 - (c) $\gamma(u) = (u \cos(u), u \sin(u))$. $0 \leq u \leq 4\pi$ (la courbe γ est une spirale d'Archimède).
-

Exercice 2.8. La cycloïde est la courbe décrite par un point sur le bord d'une roue qui roule, sans glisser, en ligne droite.

- (a) Dessiner une cycloïde
 - (b) Donner un paramétrage de la cycloïde (préciser d'abord le choix de la situation et du système de coordonnées).
 - (c) Calculer la longueur d'une arche de la cycloïde (en supposant que la roue engendrant la cycloïde est de longueur r)
-

Exercice 2.9. Discuter le *paradoxe de la roue d'Aristote*.

On considère deux roues attachées solidairement ensemble et centrées sur un même axe, l'une de rayon 2 et l'autre de rayon 1. On fait rouler ces roues (solidairement) sur une route pendant un tour de roue. Le centre de la grande roue s'est alors déplacé d'une distance de 4π et celui de la petite roue d'une distance de 2π . Conclusion $4\pi = 2\pi$.