Objectifs. Dans cette série, on continue l'étude des courbes sur les surfaces et les différentes notions de courbure. Il s'agit en particulier de se familiariser avec les méthodes de calculs, tout en faisant le lien avec la géométrie des surfaces.

A. Exercices standards.

Exercice 13.1. Calculer le tenseur métrique, la deuxième forme fondamentale et l'application de Weingarten de la caténoïde i.e. la surface de révolution de la chainette $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$.

On rappelle que cette surface peut se paramétriser ainsi (comme surface de révolution autour de l'axe Ox) :

$$\psi(s, \theta) = \left(\log(s + \sqrt{1+s^2}), \sqrt{1+s^2}\cos(\theta), \sqrt{1+s^2}\sin(\theta)\right).$$

Que valent la courbure moyenne et la courbure de Gauss de cette surface ?

Exercice 13.2. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^2 dont on note H et K les courbures moyenne et de Gauss respectivement. Montrer que les courbures principales sont données par

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Exercice 13.3. Montrer que la courbure de Gauss et la courbure moyenne peuvent s'écrire en fonction des coefficients (g_{ij}) et (h_{ij}) des deux formes fondamentales par

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \qquad \text{et} \qquad H = \frac{g_{11}h_{22} - 2\,g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}.$$

Exercice 13.4. Soit $\psi_1 : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière de classe C^2 et $\lambda > 0$. On note $\psi_2 = \lambda\psi_1 : \Omega \to \lambda S \subset \mathbb{R}^3$ la surface obtenue en appliquant une homothétie de rapport λ. Quelle est la relation entre la courbure de Gauss $K_1(u,v)$ en un point $p = \psi_1(u,v)$ de S et la courbure de Gauss $K_2(u,v)$ en un point $q = \lambda p = \psi_2(u,v)$ de λS ?

Exercice 13.5. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^3 birégulière. Prouver que si $\|\dot{\gamma}\|$ est constante, alors γ est une géodésique de la surface réglée S de paramétrisation $\psi(u,v) = \gamma(u) + v\mathbf{B}_\gamma(u)$, où $\mathbf{B}_\gamma(u)$ est le vecteur binormal de γ.

Exercice 13.6. Une courbe régulière γ de classe C^2 sur une surface S est une *ligne de courbure* si sa courbure normale est en tout point une courbure principale.
Montrer que γ est une ligne de courbure si et seulement si sa torsion géodésique est nulle.

Exercice 13.7. Prouver que la courbure de Gauss d'une surface réglée S est ≤ 0 (pas besoin de faire de calculs).

Exercice 13.8. Prouver que la caténoïde et l'hélicoïde sont localement isométriques.

Remarque. Le fait que la caténoïde et l'hélicoïde sont localement isométriques impliquent que ces deux surfaces ont la même courbure de Gauss, à cause du théorème egregium, ce que confirment les calculs.

Voici deux vidéos intéressantes illustrant l'isométrie entre la caténoïde et l'hélicoïde :
`https://www.youtube.com/watch?v=VRY42CogW0I`

et ici : `https://www.youtube.com/shorts/RYHxW8GTQgQ`

B. Exercice supplémentaire

Exercice 13.9. Montrer que la pseudo-sphère de Beltrami est intrinsèquement isométrique au demi-plan de Poincaré. Puis calculer son aire

---

A noter : Sur Moodle, dans la rubrique "vidéos" il y a un lien vers une vidéo de K. Crane présentant un panorama assez complet de la courbure des courbes et des surfaces. Cette vidéo est de grande qualité mais aussi très dense, à regarder en petites tranches. Les première 55-60 minutes recouvrent des thèmes vus au cours, ensuite la vidéo illustre d'autres thèmes.

La vidéo se trouve aussi ici : `https://www.youtube.com/watch?v=e-erMrqBd1w`