

Objectifs. Cette série a pour but d'explorer la courbure des surfaces et les différentes notions qui apparaissent dans cette théorie; et comprendre comment calculer ces courbures.

A. Exercices standards.

Exercice 12.1. Prouver que si γ est une courbe birégulière de classe C^2 qui est géodésique d'une surface coorientée S , alors la torsion de γ (en tant que courbe dans $\mathbb{R}^3$) coïncide au signe près avec la torsion géodésique de cette courbe (ce résultat explique la terminologie de *torsion géodésique*).

La réciproque de cet énoncé est-elle valable (i.e. est-ce qu'une courbe sur une surface telle que la torsion géodésique est égale à la torsion est toujours une géodésique de cette surface) ?

Indication. Dans cet exercice il est utile de comparer les équations de Darboux et de Serret-Frenet pour la courbe γ .

Exercice 12.2. Calculer la courbure moyenne et la courbure de Gauss du cylindre circulaire droit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x^2 + y^2 = a^2$. (Peut-on prédire ces valeurs sans faire de calculs ?).

Exercice 12.3. (a) Calculer le tenseur métrique, la deuxième forme fondamentale et l'application de Weingarten de l'hélicoïde

$$\psi(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u).$$

(b) Que valent la courbure moyenne et la courbure de Gauss de cette surface ?

Exercice 12.4. Montrer que la matrice de la seconde forme fondamentale du graphe de la fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 (où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$) est

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{pmatrix}$$

Exercice 12.5. Est-ce que la matrice de l'application de Weingarten d'une surface est toujours une matrice symétrique ?

Exercice 12.6. Soit p un point non ombilique d'une surface régulière de classe C^2 . On note $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ les vecteurs unités de $T_p S$ dans les directions principales. Prouver la *formule d'Euler*, qui dit que la courbure normale du vecteur $\mathbf{v}_\theta = \cos(\theta)\mathbf{v}_1 + \sin(\theta)\mathbf{v}_2 \in T_p S$ est donnée par

$$k_n(\mathbf{v}_\theta) = k_1 \cos(\theta)^2 + k_2 \sin(\theta)^2,$$

où k_1, k_2 sont les courbures principales de S en p .

En déduire que k_1 et k_2 sont les valeurs minimale et maximale de la courbure normale de S au point p .

(On rappelle qu'un point de la surface S est dit *ombilique* si les deux courbures principales en ce point coïncident : $k_1 = k_2$).

B. Exercice supplémentaire (sur les géodésiques des surfaces de révolution).

Exercice 12.7. Le but est de cet exercice est de déterminer toutes les géodésiques des surfaces de révolution. On considère la surface de révolution $\psi : \Omega = [0, 2\pi] \times I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\psi(\theta, s) = (r(s) \cos(\theta), r(s) \sin(\theta), z(s))$$

(a) On considère une courbe $\gamma(t)$ ($t \in J$), de classe C^2 tracée sur la surface S . Montrer que pour tout $t \in J$ on a

$$\langle \ddot{\gamma}(t), \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rangle = \frac{d}{dt} \left(r^2 \dot{\theta}(t) \right),$$

où le point signifie la dérivée par rapport au paramètre t .

(b) Montrer que si $\gamma(t)$ est une géodésique, alors les quantités

$$r^2(t) \dot{\theta}(t) \quad \text{et} \quad (r(t) \dot{\theta}(t))^2 + \dot{r}(t)^2 + \dot{z}(t)^2$$

sont constantes (indépendante de t).

(c) Montrer que la fonction $t \mapsto 1/r(t)$ est bornée pour toute géodésique qui n'est pas un méridien de la surface de révolution.

(d) Montrer que la hauteur de toute géodésique dans la pseudo-sphère qui n'est pas un méridien est une courbe bornée dans $\mathbb{R}^3$.

Indication pour (c). On peut calculer la vitesse et l'accélération de γ en coordonnées cylindriques.