A. Exercices standards.

Exercice 11.1. Soit $\gamma(s) \in \mathbf{R}^3$ $(a \leq s \leq b)$ une courbe régulière au sens de Frenet et $\varepsilon > 0$ une (petite) constante. La réunion des cercles de rayons ε centré en $\gamma(s)$ et contenus dans le plan orthogonal à $\dot{\gamma}(s)$ est une surface. On l'appelle un ε-tube autour de γ (ainsi un cylindre ou un tore sont des exemples simples de tubes.)

a) En supposant que γ est paramétrisée naturellement et birégulière, donner un paramétrage $\psi(s,\theta)$ du ε-tube (on utilisera le repère de Frenet).

b) Calculer le tenseur métrique de ce paramétrage.

c) Montrer que l'aire de ce tube est donnée par

$$A = 2\pi\varepsilon L$$

où L est la longueur de γ.

d) Observer que cette formule est surprenante : l'aire du tube ne dépend que de ε et de la longueur de la courbe γ au centre du tube. Donner néanmoins une explication intuitive de ce phénomène.

Exercice 11.2. Soit $\gamma : I \to \mathbb{S}^2$ une courbe simple de classe C^1 tracée sur la sphère unité, on suppose γ paramétrée naturellement. On considère le cône $\mathcal{C}$ de centre 0 engendré par cette courbe, c'est à dire l'ensemble des demi-droites d'origine 0 et passant par un point de γ.

(a) Donner une paramétrisation de $\mathcal{C}$ comme surface réglée et montrer que $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer le tenseur métrique pour cette paramétrisation.

(c) Montrer que $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ est localement isométrique au plan euclidien.

Exercice 11.3. Une courbe $\gamma : I \to S$ de classe C^2 tracée sur une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est une *géodésique* de cette surface si son accélération est normale à la surface pour tout t (c'est à dire $\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}S$ pour tout $t \in I$.)

Démontrer les affirmations suivantes :

(a) La vitesse de toute géodésique est constante.

(b) Les géodésiques (non constante) d'une sphère sont les grand cercles de cette sphère paramétrés à vitesse constante.

(c) Si γ est un méridien d'une surface de révolution S et γ est parcourue à vitesse constante, alors γ est une géodésique.

(d) A quelle condition un parallèle d'une surface de révolution est-elle une géodésique ?

Indication pour (b) : Soit $\gamma(t)$ une géodésique d'une sphère de centre c. Vérifier que le vecteur $m := (\gamma(t) - c) \times \dot{\gamma}$ est constant, puis considérer le produit scalaire $\langle \gamma(t) - c, m \rangle$.

Exercice 11.4. (a) On note $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ l'hélicoïde d'équation $x\sin(z) = y\cos(z)$ et $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre circulaire droit d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Montrer que l'intersection de ces deux surfaces est la réunion disjointe des images des deux hélices $\gamma_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ suivantes :

$$\gamma_+(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \qquad \gamma_-(t) = (-\cos(t), -\sin(t), t),$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{H} \cap \mathcal{C} = \gamma_+(\mathbb{R}) \cup \gamma_-(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \gamma_+(\mathbb{R}) \cap \gamma_-(\mathbb{R}) = \emptyset.$$

(en particulier l'intersection $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}$ possède deux composantes connexes).

(b) $\gamma_\pm(t)$ est-elle une géodésique du cylindre ?

(c) $\gamma_\pm(t)$ est-elle une géodésique de l'hélicoïde ?

Exercice 11.5. Calculer explicitement l'application de Gauss $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{S}^2$ de l'ellipsoïde donné sous forme implicite par

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} + \tfrac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Il s'agit donc de donner une formule pour $\nu = \nu(x, y, z)$ pour chaque point $(x, y, z) \in \mathcal{E}$ (on suppose a, b, c non nuls).

Que remarque-t-on dans le cas où $a = b = c = 1$ (i.e. lorsque $\mathcal{E}$ est la sphère unité).

Exercice 11.6. Soit $\gamma : I \to S$ une courbe régulière de classe C^2 tracée sur une surface régulière co-orientée $S \subset \mathbb{R}^3$. On appelle *repère de Darboux* le long de γ relatif à la surface S le repère mobile orthonormé $\{\boldsymbol{\nu}(t), \mathbf{T}_\gamma(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ où $\mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{1}{V_\gamma(t)}\dot{\gamma}(t)$ est le vecteur tangent unitaire à γ, $\boldsymbol{\nu}(t)$ est l'application de Gauss de S évaluée en $\gamma(t)$ et $\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \times \mathbf{T}_\gamma(t)$.

On note $\mathbf{K}_\gamma(t)$ le vecteur de courbure de γ. On rappelle que la *courbure normale* et la *courbure géodésique* de γ sont les fonctions du paramètre t définies respectivement par

$$k_n(t) = \langle \mathbf{K}_\gamma(t), \boldsymbol{\nu}(t) \rangle \qquad \text{et} \qquad k_g(t) = \langle \mathbf{K}_\gamma(t), \boldsymbol{\mu}(t) \rangle.$$

(a) Montrer que $\kappa(t)^2 = k_n(t)^2 + k_g(t)^2$, où κ est la courbure de γ (en tant que courbe de $\mathbb{R}^3$).

(b) Prouver que γ est géodésique si et seulement si sa vitesse est constante et sa courbure géodésique est nulle.

(c) Calculer le repère de Darboux, la courbure géodésique et la courbure normale du petit cercle sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ défini par les équations $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z = c$ (où $-1 < c < 1$).

Exercice 11.7. On continue avec la situation et les notations de l'exercice précédent, et on définit la *torsion géodésique* de γ par

$$\tau_g(t) = \tfrac{1}{V_\gamma(t)} \langle \dot{\boldsymbol{\nu}}(t), \boldsymbol{\mu}(t) \rangle.$$

(c) Calculer la torsion géodésique du petit cercle sur $\mathbb{S}^2$ défini $\{z = c\}$.

(d) Prouver que le repère de Darboux vérifie les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{V}\dot{\mathbf{T}} &= \ k_g \boldsymbol{\mu} + k_n \boldsymbol{\nu}, \\ \frac{1}{V}\dot{\boldsymbol{\nu}} &= -k_n \mathbf{T} + \tau_g \boldsymbol{\mu}, \\ \frac{1}{V}\dot{\boldsymbol{\mu}} &= -k_g \mathbf{T} - \tau_g \boldsymbol{\nu}, \end{cases}$$

B. Exercice supplémentaire

Exercice 11.8. Lire les chapitres 3 et 4 du livre *La Science et l'Hypothèse* (de Henri Poincaré, 1902). Disponible ici en version électronique :
`https://www.ebooksgratuits.com/pdf/poincare_science_hypothese.pdf`

C. Illustrations

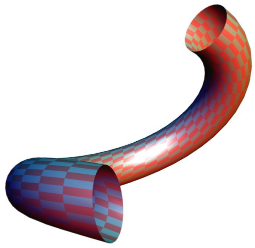

Figure 1: ε-tube autour d'une courbe.

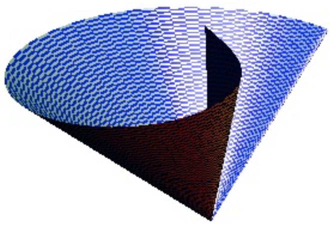

Figure 2: Cône généralisé.

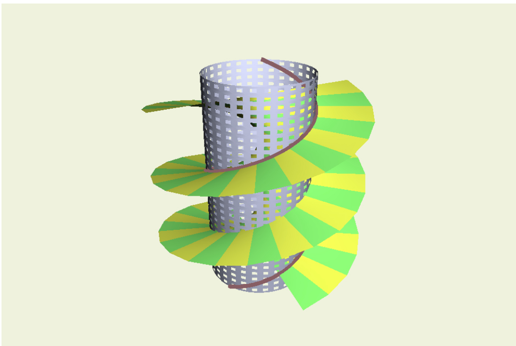

Figure 3: Intersection d'une demi-hélicoïde et d'un cylindre circulaire droit

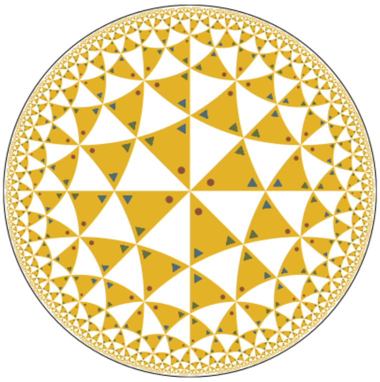

Figure 4: Pavage hyperbolique du disque de Poincaré. Tous les triangles ont la même aire.

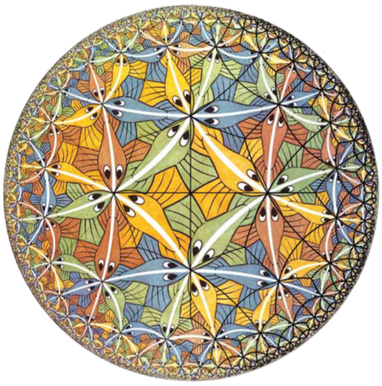

Figure 5: Cette représentation par M.C. Escher du plan hyperbolique –appelée Circle Limit III– date de 1959; l'artiste avait fait la connaissance du mathématicien H.C. Coxeter, qui lui avait envoyé un article contenant une figure de pavage hyperbolique.

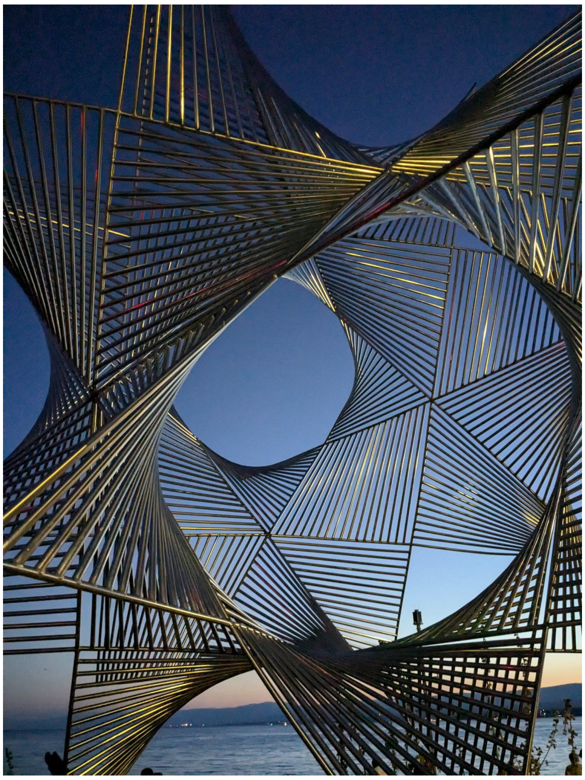

Figure 6: Cette sculpture est l'œuvre du sculpteur A. Duarte et date de 1973. On peut l'admirer au bout de la jetée à Ouchy. Elle est constituées de plusieurs surfaces réglées, ce qui semblait un thème à la mode à cette époque..