Objectifs pour cette semaine : Le premier exercice relie le volume d'un parallélépipède à la matrice de Gram. Les autres exercices portent sur des notions de géométrie intrinsèque des surfaces.

Exercice 10.1. Expliquer pourquoi le volume du parallélépipède $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^m$ construit sur les vecteurs $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^m$ vérifie

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{P}) = \sqrt{\det(\mathbf{G})},$$

où $\mathbf{G}$, est la matrice de Gram de $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ (c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les produits scalaires $g_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle$).

Exercice 10.2. (a) Donner un domaine ouvert maximal sur lequel les coordonnées polaires définissent un difféomorphisme $\psi : (r, \theta) \to (x, y)$.

(b) Calculer le tenseur métrique associé.

(c) En déduire la formule pour calculer l'aire d'un domaine en coordonnées polaires.

Exercice 10.3. Considérons l'hélicoïde définie par

$$S = \{(x, yz) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x\sin(z) - y\cos(z) = 0\}$$

(a) Prouver que l'hélicoïde est une surface réglée et décrire la géométrie de cette surface.

(b) Montrer que l'application

$$\psi(u, v) = (v\cos(u), v\sin(u), u)$$

défini un diféomorphisme (global) entre $\mathbb{R}^2$ et S.

(c) Calculer ensuite le tenseur métrique associé à ce paramétrage.

Exercice 10.4. Prouver que l'aire d'une surface paramétrée régulière $\psi : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^1 peut se calculer par la formule

$$\mathrm{Aire}(S) = \iint_\Omega \| \tfrac{\partial \vec{\psi}}{\partial u} \times \tfrac{\partial \vec{\psi}}{\partial v} \| du dv$$

Exercice 10.5. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et notons S la surface de révolution dans $\mathbb{R}^3$ obtenue par rotation du graphe de f autour de l'axe Ox. Prouver soigneusement que

$$\mathrm{Aire}(S) = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot |f(x)| \, dx.$$

Exercice 10.6. La *chaînette* est le graphe du cosinus hyperbolique, c'est-à-dire la courbe $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$.

(a) Expliquer pourquoi cette courbe s'appelle ainsi (une petite recherche sur internet n'est pas interdite).

(b) Montrer que la courbure de α est donnée par $\kappa(t) = 1/\cosh(t)^2$.

(c) Calculer la développée de α.

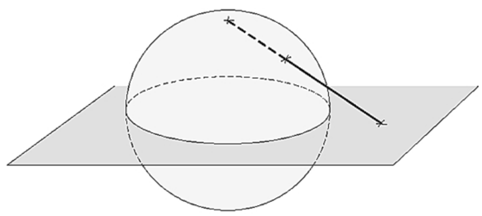
(d) Calculer l'abscisse curviligne de la chaînette depuis le point initial $\alpha(0) = (0, 1)$, puis donner la paramétrisation naturelle de α.

(e) La surface de révolution de la chaînette autour de l'axe Ox s'appelle une *caténoïde*. Calculer le tenseur métrique de la caténoïde (en préférant la paramétrisation naturelle de la chaînette).

Exercice 10.7. Soit $S_a \subset \mathbb{R}^3$ la sphère de rayon $a > 0$ centrée en l'origine. On appelle *projection stéréographique* l'application

$$\pi : S_a \setminus \{(0, 0, a)\} \to \mathbb{R}^2$$

qui envoie un point $p = (x, y, z) \in S_a$ ($p \neq (0, 0, a)$) sur l'unique point q du plan $\mathbb{R}^2$ tel que les trois points $(0, 0, a)$, p et q sont alignés (on regarde $\mathbb{R}^2$ comme un plan dans $\mathbb{R}^3$.)



Notons $\psi : \mathbb{R}^2 \to S_a$ l'application inverse de la projection stéréographique.

(a) Trouver une formule explicite pour ψ et montrer que ψ est un paramétrage régulier de $S_a \setminus \{(0, 0, a)\}$.

(b) Calculer le tenseur métrique associé à cette paramétrisation.

(c) Cette paramétrisation est-elle conforme ?

(d) Prouver que la projection stéréographique définit un homéomorphisme entre la sphère et le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^2$.
(Le *compactifié d'Alexandrov* de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble $\widehat{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ muni de la topologie pour laquelle tout voisinage d'un point q de $\mathbb{R}^2$ est aussi un voisinage de q dans $\widehat{\mathbb{R}^2}$ et les complémentaires des parties compactes de $\mathbb{R}^2$ forment une base de voisinage du point ∞).

Remarque. Parfois on définit la projection stéréographique en projetant sur un autre plan que le plan de l'équateur, en particulier on projette souvent sur la plan tangent au “pôle sud” $(0, 0, -a)$.
