EPFL - Automne 2023	M. Troyanov
MATH 213: Géométrie Différentielle	**Exercices**
Série 1	automne 2024

La géométrie différentielle peut très brièvement se résumer dans l'idée d'appliquer des méthodes de calcul différentiel et d'analyse à des problèmes de géométrie, en particulier à l'étude des courbes, des surfaces et d'objets généralisant ces notions. Toutefois le géométrie différentielle ne se réduit pas au seul usage du calcul différentiel mais fait intervenir d'autres techniques telles que celles de l'algèbre linéaire, de la géométrie vectorielle, la théorie des groupes, la topologie, ainsi que la géométrie euclidienne classique. Cette première série d'exercices propose de revisiter le produit vectoriel d'une part, et de construire une preuve de l'inégalité isopérimétrique dans le plan d'autre part.

Exercice 1.1. On rappelle que le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis dans une base orthonormée directe (i.e. d'orientation positive) par $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$ est le vecteur

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j \, \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{e}_3 \\
&= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Prouver que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ est uniquement déterminé par les conditions géométriques suivantes :

(a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ et $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$.

(b) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \text{aire}(\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ (où $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est le parallélogramme construit sur les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$).

(c) Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont linéairement indépendants, alors $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$ est une base d'orientation positive de $\mathbb{R}^3$.

Les exercices qui suivent visent à démontrer l'inégalité isopérimétrique dans le plan. Considérons un domaine borné D contenu dans la plan $\mathbb{R}^2$. Son bord ∂D est la réunion d'une ou plusieurs courbes et on appelle périmètre de D la longueur totale de ∂D (qui peut éventuellement être infinie). Le quotient isopérimétrique de D est défini par

$$\text{Isp}(D) = \frac{(\text{Longueur}(\partial D))^2}{\text{Aire}(D)}.$$

L'inégalité isopérimétrique dans le plan affirme que *le quotient isopérimétrique minimal parmi tous les domaines du plan est atteint pour les disques, i.e. pour tout domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ on a*

$$\text{Isp}(D) \geq \text{Isp}(\mathbb{B}^2),$$

où $\mathbb{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ est le disque unité du plan. De plus on a égalité si et seulement si D est un disque (de rayon quelconque).

Avant de commencer les exercices qui suivent, prenez un moment pour réfléchir à cette inégalité; vous pouvez en discuter entre vous. Comprenez-vous ce qu'elle signifie? Quel genre de raisonnement faut-il faire pour établir une preuve de cette inégalité ?

Exercice 1.2. (a) Prouver que le quotient isopérimétrique est invariant par similitude (une similitude du plan ou de l'espace euclidien est une bijection qui préserve les rapport de distances; c'est donc la composition d'une homothétie et d'une isométrie).

(b) Calculer le quotient isopérimétrique d'un carré, d'un triangle équilatéral et d'un disque.

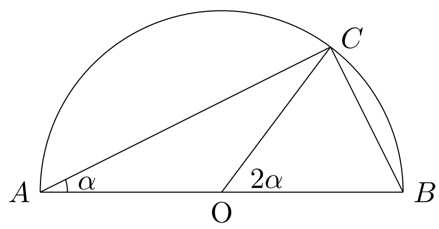
Le but des exercices 1.3 à 1.9 est de conduire à une preuve de l'inégalité isopérimétrique dans le plan. On utilisera uniquement des résultats de géométrie euclidienne de base et des propriétés intuitives élémentaires des notions de longueur et d'aire.

Exercice 1.3. Prouver la proposition 32 du livre 1 des Éléments d'Euclide. Cette proposition dit que la somme des angles de tout triangle est égale à deux angles droits.
Indication. Il faut utiliser le postulat des parallèle[1].

Exercice 1.4. (a) Soit C un point sur le cercle de diamètre $[A, B]$ (supposé distinct de A et B). Prouver que l'angle en O du triangle OCB est le double de l'angle en A du triangle ACB:

$$\sphericalangle_O CB = 2\sphericalangle_A CB$$

(on écrit aussi $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$).



(b) Prouver ensuite le théorème du demi-cercle de Thales : Le triangle ABC est un triangle rectangle en C si et seulement le point C est un point du cercle de diamètre $[A, B]$ (rappelons que ABC est un triangle rectangle en C si $\sphericalangle_C AB = \pi/2$).

Exercice 1.5. Prouver que parmi tous les triangles ABC tels que $x = d(A, C)$ et $y = d(B, C)$, celui qui maximise l'aire est le triangle rectangle en C.

Exercice 1.6. Rappelons qu'un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, si pour toute paire de points $A, B \in D$, le segment $[A, B]$ est contenu dans D. Prouver que si $D \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas convexe, alors ce domaine ne minimise pas le quotient isopérimétrique (i.e. on peut construire un autre domaine D' tel que $\mathrm{Isp}(D') < \mathrm{Isp}(D)$).

Exercice 1.7. Supposons que $D \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine isopérimétrique optimal (en particulier D est convexe), notons $\Gamma = \partial D$ son bord. Soient $A, B \in \Gamma$ deux points du bord de D qui partagent la courbe Γ en deux parties d'égales longueurs. Montrer alors que la corde $[A, B]$ partage D en deux régions d'aires égales.

[1] Le postulat des parallèle, aussi appelé 5ème postulat d'Euclide énonce que dans un plan, par tout point extérieure à une droite il passe une unique parallèle à cette droite.

Exercice 1.8. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine isopérimétrique optimal et Γ, A, B comme dans l'exercice précédent. Montrer alors que pour tout point P de Γ, différents de A et B, on a $\sphericalangle_P AB = \pi/2$.

Indication. Supposant par l'absurde que ça n'est pas le cas pour un certain point P, utiliser l'exercice 1.6 pour construire un domaine D' dont le périmètre est égal à celui de D mais $\text{Aire}(D') > \text{Aire}(D)$.

Exercice 1.9. A partir des exercices précédents, prouver l'inégalité isopérimétrique dans le plan : pour tout domaine du plan on a $\text{Isp}(D) \geq 4\pi$, avec égalité si et seulement si D est un disque (on admet l'existence d'un domaine isopérimétrique optimal, il s'agit ici de prouver l'unicité)