Examen du cours MATH-213

22 janvier 2024 15h15–18h15

Nom : _____

Prénom : _____

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- Ce cahier fait 14 pages. Vérifier que votre cahier est complet.
- Les feuilles de brouillon sont pour vos calculs, elles ne seront pas corrigées.
- Ne pas dégrafer le cahier !
- L'examen contient 15 questions, le total est de 100 points.
- Ne pas écrire au crayon, ni au stylo rouge.
- Documents autorisés: Un formulaire est distribué, aucun autre document n'est admis !
- Appareil électronique : Aucun, sauf autorisation de l'EPFL
- Pour les questions à choix multiple il n'y a qu'une réponse correcte. On compte +5 points pour une réponse correcte et -2 points pour une réponse fausse. Si vous ne savez pas répondre il faut l'indiquer (il ne vaut pas la peine de répondre au hasard).
- Pour les questions VRAI/FAUX, on compte on compte +2 points par réponse correcte et −1 pour chaque réponse qui n'est pas correcte.
- A la fin de l'examen, vous laisserez votre copie sur la table, ainsi que toutes les feuilles de brouillons.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

10	11	12	13	14	15	Total	Note

Bon travail et bonne chance !

1 Questions à choix multiples

Pour chaque exercice de cette partie, il n'y a qu'une réponse correcte. Indiquez votre réponse en cochant la case correspondante. On compte +5 points pour une bonne réponse et -2 points pour une réponse fausse. Si vous ne savez pas répondre il faut cocher *Ne sait pas*, qui sera compté comme 0 point.
Vous pouvez faire vos calculs sur les feuilles de brouillon (elles ne seront pas corrigées).

Exercice 1. [5 points.] Calculer la longueur ℓ de la courbe plane

$$\gamma(t) = \left(\tfrac{4}{3}t^{\frac{3}{2}},\, t - \tfrac{1}{2}t^2\right), \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Réponse :

- ☐ $\ell = 5$
- ☐ $\ell = \dfrac{5}{2}$
- ☐ $\ell = 3$
- ☐ $\ell = 4$
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 2. [5 points.] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine du plan et $\psi : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière d'une surface de classe C^1. Laquelle parmi les matrices suivantes, peut représenter le tenseur métrique de S en $u = (u_1, u_2) \in \Omega$?

- ☐ $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 3. [5 points.] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine du plan et $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière d'une surface de classe C^2. On suppose qu'en un point $u = (u_1, u_2) \in \Omega$, les dérivées de ψ sont données par

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u_1} = (2, 1, 0), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = (1, 0, 0),$$

et

$$\mathbf{b}_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1^2} = (2, 2, 1), \quad \mathbf{b}_{12} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial u_2} = (0, 1, 2), \quad \mathbf{b}_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1^2} = (-1, 7, 1).$$

Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale correspondant à la co-orientation définie par $\nu = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|}$.

☐ $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

☐ Ne sais pas.

Exercice 4. [5 points.] On considère la même surface paramétrée que dans l'exercice précédent. Calculer les courbures principales k_1, k_2 au même point $u = (u_1, u_2)$.

☐ $k_1 = 1 - \sqrt{12}$ et $k_2 = 1 + \sqrt{12}$.

☐ $k_1 = -1 - \sqrt{12}$ et $k_2 = -1 + \sqrt{12}$.

☐ $k_1 = -1$ et $k_2 = 3$.

☐ $k_1 = -3$ et $k_1 = 2$.

☐ Ne sais pas.

Exercice 5. [5 points.] Soient $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^2 et $\alpha, \beta : I \to S$ deux courbes, également de classe C^2, tracées sur S. Supposons que α et β ont un contact d'ordre 1 en $t_0 \in I$. Que peut-on dire de leurs courbures normale et géodésique ?

☐ En t_0, les deux courbes ont même courbures normale et géodésique.

☐ En t_0, les deux courbes ont la même courbure géodésique mais en général pas la même courbure normale.

☐ En t_0, les deux courbes ont la même courbure normale mais en général pas la même courbure géodésique.

☐ Les deux courbes n'ont généralement ni la même courbure normale, ni la même courbure géodésique.

☐ Ne sais pas

Exercice 6. [5 points.] Que vaut la torsion τ de la courbe γ définie par

$$\gamma(t) = (t + \log(t),\, t - \log(t),\, 2t - 1) \quad (0 < t < \infty)\,?$$

☐ $\tau = -1$.

☐ $\tau = 0$.

☐ $\tau = \dfrac{1}{t}$.

☐ $\tau = -\dfrac{1}{t}$.

☐ Ne sais pas

Exercice 7. [5 points.] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$. Sachant que le centre du cercle osculateur au graphe de f en $(0, 0)$ est le point $c = (-2, 1)$, quelle est la valeur de la seconde dérivée de f en 0 ?

☐ $f''(0) = 5$.

☐ $f''(0) = 1$.

☐ $f''(0) = -5$.

☐ $f''(0) = -1$.

☐ Ne sais pas

2 Vrai ou Faux ?

Pour chaque question dans cette partie , marquer (sans faire de ratures) la VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse). On compte $+2$ points par réponse correcte et -1 point pour chaque réponse qui n'est pas correcte.

Question 8. [2 points.]
Soit $\psi : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière. On suppose que les lignes de coordonnées se coupent orthogonalement au point $p = \psi(u)$. Alors la matrice $\mathbf{G}(u)$ de la première forme fondamentale au point u est une matrice diagonale.

☐ VRAI ☐ FAUX ☐ Ne sais pas

Question 9. [2 points.] La matrice $\mathbf{L}(u)$ de l'application de Weingarten d'une surface paramétrée régulière est toujours une matrice symétrique.

☐ VRAI ☐ FAUX ☐ Ne sais pas

Question 10. [2 points.]
Si deux surfaces de $\mathbb{R}^3$ de classe C^2 sont intrinsèquement isométriques, alors elles ont la même courbure moyenne.

☐ VRAI ☐ FAUX ☐ Ne sais pas

Question 11. [2 points.] La courbure orientée d'une courbe plane de classe C^2 n'est définie que dans le cas où cette courbe est birégulière.

☐ VRAI ☐ FAUX ☐ Ne sais pas

Question 12. [2 points.] Si γ est une géodésique d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$, alors sa torsion géodésique est égale à sa torsion en tant que courbe de $\mathbb{R}^3$ (au signe près).

☐ VRAI ☐ FAUX ☐ Ne sais pas

3 Questions ouvertes

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.

Problème 13. [22 points.]

On considère la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ définie par l'équation $y = z(x - z)$.

(a) Prouver qu'il s'agit d'une surface régulière (i.e. une sous-variété) de classe C^∞ de $\mathbb{R}^3$.

(b) Définir ce qu'est une surface réglée.

(c) Prouver que S est une surface réglée.

(d) Montrer que l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\psi(u, v) = (u + v, uv, v)$ est une paramétrisation régulière globale de S.

(e) Calculer le tenseur métrique associé à cette paramétrisation.

(f) Calculer la deuxième forme fondamentale associée à cette paramétrisation.

(g) Que vaut la courbure de Gauss de cette surface.

Vos réponses :

Problème 14. [15 points.]

Une courbe régulière $\gamma : I \to S$ tracée sur une surface régulière coorientée $S \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^2 s'appelle une *ligne asymptotique*[1] si elle est de classe C^2 et son vecteur de courbure est tangent à la surface pour tout $t \in I$.

Prouver que les affirmations suivantes sont équivalentes:

(a) La courbe γ est une ligne asymptotique de S.

(b) La courbure normale k_n de γ est identiquement nulle.

(c) $h(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ pour tout $t \in I$, où h est la seconde forme fondamentale de S.

(d) En tout point de la courbe, le vecteur binormal de γ est égale, au signe près, au vecteur de coorientation de la surface.

(e) Le plan osculateur à γ coïncide avec le plan tangent en S en chaque point de γ.

(Pour les points (d) et (e) on suppose que la courbe est birégulière).

Vos réponses :

[1] La terminologie est justifiée par le fait que le vecteur vitesse d'une ligne de courbure est en direction d'une asymptote de l'indicatrice de Dupin, qui est l'ensemble des vecteurs $v \in T_pS$ tels que $|h(v, v)| = 1$ (mais ceci n'influence pas l'exercice).

Problème 15. [18 points.]

Répondre aux questions suivantes, en donnant des définitions précises et en justifiant soigneusement vos affirmations.

(a) Définir la notion de *sous-variété différentiable* de dimension m dans $\mathbb{R}^n$.

(b) Définir ce qu'est l'*espace tangent* T_pM à une sous-variété différentiable $M \subset \mathbb{R}^n$.

(c) Démontrer que T_pM est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Quel est sa dimension ?

(d) Démontrer que si M est une hypersurface définie par une équation régulière $f = 0$, i.e. $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$, alors

$$T_pM = \left\{ v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \right\}.$$

Vos réponses :