

Sur la notion de paramétrisation

Rappelons d'abord que chaque point d'une sous-variété différentiable de $M \subset \mathbb{R}^n$ admet un voisinage qui est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m$, où m est la dimension de M . Cette propriété découle immédiatement de la définition (mais la définition est plus élaborée).

Cela signifie donc que pour chaque point $p \in M$ on peut trouver :

- Un ouvert relatif $W \subset M$ qui contient le point p (dire que W est un ouvert relatif signifie qu'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $W = M \cap U$);
- Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^m$;
- Un homéomorphisme $\psi : \Omega \rightarrow W \subset M$.

Dans ce cas, on dit que ψ est une *paramétrisation locale* de la variété M et que l'homéomorphisme inverse $\varphi = \psi^{-1} : W \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m$ est une *carte locale* de la variété au voisinage de p .

Remarquons que pour chaque point $q \in W$, il existe un unique élément $u = (u_1, \dots, u_m) \in \Omega$ tel que $q = \psi(u) = \psi(u_1, \dots, u_m)$. On dit que $u_1, \dots, u_m$ sont les *paramètres* du point q , où que ce sont les *coordonnées curvilignes locales* associées à la carte φ .

Si la variété M est de classe C^k , on dit que la paramétrisation $\psi : \Omega \rightarrow W$ est *régulière* si elle est différentiable de classe C^k et si c'est une immersion (c'est-à-dire $d\psi_u$ est injective pour tout $u \in \Omega$, ou si on préfère, qu'elle soit de rang constant égale à m).

Dans ce cas on peut prouver en utilisant le théorème du rang constant que la carte $\varphi = \psi^{-1} : W \rightarrow \Omega$ est également différentiable, donc ψ et φ sont des difféomorphismes inverses l'un de l'autre.

On dit que c'est une *paramétrisation régulière globale*, si de plus $W = M$, i.e. ψ est un difféomorphisme de Ω vers M . Il faut être conscient que généralement une variété n'admet pas de paramétrisation régulière globale pour des raisons topologiques. Il faut pour cela qu'elle soit homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m$. En particulier une variété compacte (sans bord), comme la sphère ou le tore, n'admet jamais de paramétrisation régulière globale.

Dans la pratique, la définition ci-dessus est assez restrictive et il est utile d'admettre certaines généralisations :

1. On admet parfois qu'une paramétrisation n'est pas injective, tout en gardant l'hypothèse de régularité, i.e. que ψ est une immersion. Dans ce cas le théorème du rang constant implique que ψ est toujours localement injective.
2. Dans la définition ci-dessus, on demande que Ω soit un ouvert. Dans la pratique on considère parfois le cas où le domaine de la paramétrisation est un fermé. Par exemple lorsqu'on veut définir une paramétrisation surjective de la sphère.
3. On admet parfois que en certains points de Ω , le rang de $d\psi$ soit inférieur à m . On considère alors que ce sont des *points singuliers* et on admet qu'ils forment un ensemble de mesure nulle. Par exemple lorsqu'on paramétrise une sphère par sa latitude et longitude, les deux pôles nord et sud apparaissent comme des points singuliers de la paramétrisation (noter qu'il ne s'agit pas de points singuliers de la sphère, mais seulement de la façon dont on choisit de la paramétrer).
4. Parfois la variété M elle-même peut avoir des points singuliers, comme par exemple le sommet d'un cône.

Notons finalement que les mots "paramétrisation" et "paramétrage" sont pour nous des synonymes.