

Remarque.

Les exercices avec références entre parenthèses proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri. Les corrigés sont à consulter dans le livre, même si parfois certaines étapes sont développées dans le corrigé publié sur moodle.

Exercice 1 (Ex 4.8 et 4.7 pages 43 et 42, corrigé p. 51).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement. Soit ν un champ de normales unités extérieures à Ω . Soient F un champ vectoriel tel que $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ et f un champ scalaire tel que $f \in C^2(\bar{\Omega})$. Montrer que :

$$(i) \quad \iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) \, dl$$

Indication : écrire $F = (F_1, F_2)$ et appliquer le théorème de Green au champ vectoriel $\Phi = (-F_2, F_1)$ en se référant au §2.4 du cours.

$$(ii) \quad \iint_{\Omega} \Delta f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} (\operatorname{grad} f \cdot \nu) \, dl.$$

Aide-mémoire : pour calculer une intégrale de surface (comme dans l'exercice 2 et parties 4-5. de l'exercice 3), procéder de la manière suivante :

- (i) Esquisser la surface Σ .
- (ii) Donner une paramétrisation $\sigma : \bar{A} \rightarrow \Sigma$ de la surface Σ . On précisera l'ensemble $\bar{A}$ et la fonction σ .
- (iii) Donner un vecteur normal et ajouter ce vecteur à votre esquisse.
- (iv) Utiliser cette paramétrisation pour exprimer l'intégrale en question comme intégrale multiple où les bornes et la fonction à intégrer sont indiquées explicitement.
- (v) Calculer cette intégrale.

Exercice 2 (Ex 5.1 p. 56, corrigé p. 57).

Soient $f(x, y, z) = xy + z^2$ et

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}.$$

Calculer $\iint_{\Sigma} f \, ds$

Exercice 3 (Ex 5.6 p. 57, corrigé p. 60).

Soit $0 < a < R$. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le tore Ω obtenu par rotation du disque $(x - R)^2 + z^2 \leq a^2$ autour de l'axe Oz et sa représentation décrite par

$$x = (R + r \cos \varphi) \cos \theta, \quad y = (R + r \cos \varphi) \sin \theta, \quad z = r \sin \varphi$$

avec $0 < r < a$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

- (i) Dessiner Ω et indiquer ce que représentent r , θ et φ .
- (ii) Calculer le Jacobien de la transformation qui décrit Ω en termes des variables r , θ et φ .
- (iii) Calculer le volume de Ω .

- (iv) Ecrire une paramétrisation régulière de la surface du tore (notée $\partial\Omega$) et calculer une normale à $\partial\Omega$.
- (v) Calculer l'aire de $\partial\Omega$.
- (vi) Calculer $\iiint_{\Omega} z^2 \, dx \, dy \, dz$

Les exercices suivants sont une révision d'analyse II

Exercice 4. (i) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$.

Calculer $\iint_D \sqrt{1-x-y} \, dx \, dy$

(ii) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2(x + \sqrt{x^2 + y^2})\}$.

Calculer $\iint_D \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}}$

Indication : Ne pas essayer de faire un dessin. De plus, on pourra utiliser que $2\cos^2(\theta/2) = 1 + \cos(\theta)$.

(iii) Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 1 - y^2 \text{ et } x + y \leq 1\}$.

Indication : Si un dessin est faisable, ça n'aide pas beaucoup à l'exercice.

Calculer $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$

Exercice 5.

Calculer le volume de :

(i) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq z\}$.

(ii) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq \sqrt{2}, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } z \geq 0\}$.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 2 $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Exercice 3 (ii) $r(R + r \cos \varphi)$

(iii) $2\pi^2 Ra^2$

(v) $4\pi^2 Ra$

(vi) $\frac{\pi^2 Ra^4}{2}$

Exercice 4 (i) $\frac{4}{15}$

(ii) 16

(iii) $\frac{11}{60}$

Exercice 5 (i) $\frac{\pi}{12} \left(3\sqrt{5} - 1 - 8 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{5\pi}{12} (3 - \sqrt{5})$

(ii) $\frac{\sqrt{2}\pi}{4} - \frac{2}{3}$