Remarque.
Les exercices avec références entre parenthèses proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri. Les corrigés sont à consulter dans le livre, même si parfois certaines étapes sont développées dans le corrigé publié sur moodle.

Aide-mémoire : pour vérifier le Théorème de Green (e.g. exercices 1 et 2), appliquer les étapes suivantes :

(i) Essayer d'esquisser le domaine Ω, avec son bord $\partial\Omega$. Indiquer le sens de parcours de $\partial\Omega$ afin que ce dernier soit orienté positivement.

(ii) Calculer $\mathrm{rot}F(x, y)$.

(iii) Paramétrer le domaine Ω, et utiliser cette paramétrisation pour calculer

$$\iint_\Omega \mathrm{rot}F \, dxdy.$$

(iv) Paramétrer le bord $\partial\Omega$ de Ω, et utiliser cette paramétrisation pour calculer

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl.$$

(v) Vérifier la conclusion du théorème de Green pour Ω et F.

Exercice 1 (ex 4.1 et 4.2 p. 41, corrigé p. 44)**.**
Vérifier le théorème de Green dans les cas suivants :

(i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ et $F(x, y) = (xy, y^2)$

(ii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ et $F(x, y) = (x + y, y^2)$.

Exercice 2 (ex 4.4i et 4.5 p. 42, corrigé p. 46)**.**
Vérifier le théorème de Green dans les cas suivants :

(i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 < 1\}$ et $F(x, y) = (-x^2 y, xy^2)$

(ii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \text{ et } x^2 - 4 < y < 2\}$ et $F(x, y) = (xy, y)$.
Indication : Il sera difficile de paramétrer le domaine avec une seule paramétrisation. Essayez de dessiner le domaine A puis, vous avez deux options :

- Calculer $\displaystyle\iint_A \mathrm{rot}\, F(x, y) dxdy$ comme une intégrale moins une autre. (Recommandé car plus rapide)
- Séparer le domaine en quatre parties x-simples ou y-simples. (Pas recommandé car plus long)

Exercice 3 (ex 4.3 p. 42, corrigé p. 45)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le triangle de sommets $(0, 0), (0, 1)$ et $(1, 0)$. Soit $f(x, y) = y + e^x$. Calculer :

(i) $\displaystyle\int_\Omega \Delta f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

(ii) $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \nu_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \nu_2 \right) \mathrm{d}l$ où $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ est la normale extérieure unité à $\partial\Omega$.

Exercice 4 (ex 4.9i p. 43, corrigé p. 51)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement. Soient les champs vectoriels F, G_1 et G_2 définis par

$$F(x,y) = (-y,x), \quad G_1(x,y) = (0,x) \quad \text{et} \quad G_2(x,y) = (-y,0).$$

Montrer que :

(*i*) $\mathrm{Aire}(\Omega) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\partial\Omega} F \cdot \mathrm{d}l$

(*ii*) $\mathrm{Aire}(\Omega) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} G_1 \cdot \mathrm{d}l$

(*iii*) $\mathrm{Aire}(\Omega) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} G_2 \cdot \mathrm{d}l$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (*i*) 0

(*ii*) -3π

Exercice 2 (*i*) $\frac{3\pi}{2}$

(*ii*) 0

Exercice 3 (*i*) $e-2$

(*ii*) $e-2$