

Remarque.

Les exercices avec références entre parenthèses proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri. Les corrigés sont à consulter dans le livre, même si parfois certaines étapes sont développées dans le corrigé publié sur moodle.

Exercice 1 (ex 3.1, p. 27, corrigé p. 30).

Soient les champs vectoriels $F_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définis par

$$F_1(x, y) = (y, xy - x), \quad F_2(x, y) = (3x^2y + 2x, x^3), \quad F_3(x, y) = (3x^2y, x^2).$$

Le champ F_i dérive-t-il d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$?

Si oui, trouver un potentiel duquel dérive F_i , si non trouver un chemin fermé Γ tel que $\int_{\Gamma} F_i \cdot dl \neq 0$.

Exercice 2 (ex 3.3, p. 28, corrigé p. 32).

Soit $F(x, y, z) = \left(2xy + \frac{z}{1+x^2}, x^2 + 2yz, y^2 + \arctan x \right)$.

Le champ F dérive-t-il d'un potentiel sur $\mathbb{R}^3$? Si oui, trouver ce potentiel.

Exercice 3 (ex 3.8, p. 29, corrigé p. 36).

Soient les champs

$$F(x, y) = \left(\frac{-x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-y}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

et

$$G(x, y) = \left(\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

définis sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Dérivent-ils d'un potentiel sur Ω ? (Si oui trouver un potentiel, si non justifier votre réponse.)

Exercice 4 (ex 3.6, p. 28, corrigé p. 34).

Soit l'équation différentielle

$$F_2(t, u(t)) u'(t) + F_1(t, u(t)) = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Soit $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ un champ vectoriel qui dérive d'un potentiel f sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer qu'une solution $u(t)$ de l'équation différentielle est donnée, sous forme implicite, par

$$f(t, u(t)) = \text{constante} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Indication : Calculer $\frac{d}{dt} f(t, u(t))$.

2. En déduire une solution de

$$u^2(t)u'(t) + \sin t = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ avec la condition initiale } u(0) = 3.$$

Exercice 5 (ex 3.2, p. 27, corrigé p. 31).

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ tel que $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ défini par $F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$.

Soit

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 [xf(tx, ty) + yg(tx, ty)] dt.$$

1. Montrer que si $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v}$, alors $F(x, y) = \text{grad } \varphi(x, y)$.

Indication : Calculer $\frac{d}{dt}[tf(tx, ty)]$ et $\frac{d}{dt}[tg(tx, ty)]$

2. En déduire un potentiel pour $F(x, y) = (2xy, x^2 + y)$.
3. Comparer l'expression pour φ ci-dessus avec la formule donnée dans l'esquisse de la démonstration du Théorème 2.10 du cours.