

**Remarque.**

Les exercices avec références entre parenthèses proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri. Les corrigés sont à consulter dans le livre, même si parfois certaines étapes sont développées dans le corrigé publié sur moodle.

**Exercice 1** (ex 17.10 p. 272, corrigé p. 279).

Trouver une solution  $2\pi$ -périodique  $y(x)$  de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = f(x)$$

où  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x - \frac{\pi}{2})^2 & \text{si } 0 \leq x < \pi, \\ \frac{\pi^2}{2} - (x - \frac{3\pi}{2})^2 & \text{si } \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

**Exercice 2** (Exemple 17.6 p. 268).

Trouver une solution  $2\pi$ -périodique  $y(x)$  de l'équation

$$y(x) + 2y(x - \pi) = \cos x + 3 \sin(2x) + 4 \cos(5x) \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

*Indication* : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a les formules trigonométriques

$$\cos(nt - n\pi) = (-1)^n \cos(nt), \quad \sin(nt - n\pi) = (-1)^n \sin(nt).$$

**Exercice 3** (ex 17.8 p. 271, corrigé p. 280). (i) Calculer la série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique et paire  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \sin(3x) \quad \text{si } x \in [0, \pi].$$

(ii) Trouver une fonction  $y$  définie par  $y(x)$ ,  $2\pi$ -périodique et paire qui vérifie l'équation

$$y(x) - 2y(x - \pi) = \sin(3x) \quad \text{pour } x \in [0, \pi].$$

**Exercice 4** (ex 15.1 p. 239, corrigé p. 15.1).

Calculer la transformée de Fourier de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

*Rappel* : Si  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , pour montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ , on peut soit montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(f(x)) = \operatorname{Re}(l) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(g(x)) = \operatorname{Im}(l),$$

ou montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x) - l| = 0,$$

où,  $|\cdot|$  dénote le module complexe.

**Exercice 5.**

Dessiner le graphe des fonctions suivantes et trouver leur transformée de Fourier :

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(ii) \quad g(x) = \begin{cases} \pi + \frac{\pi}{2}x, & \text{si } -2 \leq x \leq 0, \\ \pi - \frac{\pi}{2}x, & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quel est le lien entre les fonctions  $f$  et  $g$  ?

### Solution des exercices calculatoires

Exercice 1  $\frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{8}{\pi(2k+1)^2((2k+1)^2+1)} \cos((2k+1)x) - \frac{8}{\pi(2k+1)^3((2k+1)^2+1)} \sin((2k+1)x) \right)$

Exercice 2  $-\cos(x) - 4\cos(5x) + \sin(2x)$

Exercice 3 (i)  $Ff(x) = \frac{2}{3\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi(4k^2-9)} \cos(2kx)$   
(ii)  $-\frac{2}{3\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{\pi(4k^2-9)} \cos(2kx)$

Exercice 4  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-i\alpha}{1+\alpha^2}$

Exercice 5 (i)  $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$   
(ii)  $\sqrt{2\pi} \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2}$