EPFL – Automne 2024	D. Strütt
Analyse III – GC IN	**Exercices**
Série 10	22 novembre 2024

Remarque.
Les exercices avec références entre parenthèses proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri. Les corrigés sont à consulter dans le livre, même si parfois certaines étapes sont développées dans le corrigé publié sur moodle.

Pour les exercices suivants, on suggère de :

(i) Commencer par esquisser le graphe de f et le graphe de f', sur au moins deux périodes ;

(ii) Vérifier que la fonction f est bien C^1 par morceaux ;

(iii) Pour les exercices 2, 4, et 5, citer le théorème à utiliser pour en conclure la valeur de la somme.

Exercice 1 (ex 14.4 p. 220, corrigé p. 225)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par périodicité de période 2 telle que

$$f(x) = x \quad \text{si } x \in [0, 2[.$$

Calculer la série de Fourier en notation complexe.

Exercice 2 (ex 14.11 p. 221, corrigé p. 229)**.** (i) En utilisant les notations complexes, calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique et impaire donnée sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

(ii) En déduire que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 3 (ex 14.3 p. 220, corrigé p 224)**.**
Calculer la série de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}, \\ \sin(x) & \text{si} \quad \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

Exercice 4 (ex 14.8 p. 221, corrigé 227)**.** (i) Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = |\cos(x)| \quad \text{si} \quad x \in [0, 2\pi[.$$

(ii) En déduire la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

Exercice 5 (ex 14.10 p. 221, corrigé p. 228)**.** (i) Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \cos(\alpha x) \quad si \quad x \in [-\pi, \pi[.$$

(ii) En déduire la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)}.$$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 $Ff(x) = 1 + \frac{i}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{i\pi n x}}{n}$

Exercice 2 (i) $Ff(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2i(-1)^k}{\pi(2k-1)^2} e^{i(2k-1)x}$

Exercice 3 $Ff(x) = \frac{1}{2}\sin(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \sin(2kx).$

Exercice 4 (i) $Ff(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kx)$

(ii) $\frac{1}{2}$

Exercice 5 (i) $Ff(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(k^2-\alpha^2)} \cos(kx)$