Ens. : S. Basterrechea
Analyse III -
16 janvier 2024
Durée : 180 minutes

Hero of Time

SCIPER : **111298**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, les dernières pouvant être vides. Il y a 23 questions pour un total de 70 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- Aucun **document** n'est autorisé.
- Le formulaire des transformées de Fourier est fourni.
- L'utilisation de tout **outil électronique** (calculatrice, téléphone, montre connectée etc.) est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  - le nombre de points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 points si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 points si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- De l'**espace de rédaction supplémentaire** se trouve en fin de dossier.
- Aucune **feuille supplémentaire** ne sera distribuée.
- Les **feuilles de brouillon** ne seront pas ramassées.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Formulaire de trigonométrie

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$
$$2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$
$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a-b) + \sin(a+b),$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

Table des transformées de Fourier

		$f(y)$	$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$
1		$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lvert y\rvert < \lvert b\rvert \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lvert b\rvert\alpha)}{\alpha}$
2		$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{e^{-ib\alpha} - e^{-ic\alpha}}{i\alpha\sqrt{2\pi}}$
3		$f(y) = \begin{cases} e^{-\omega y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\omega > 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega + i\alpha)}$
4		$f(y) = \begin{cases} e^{-\omega y} & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(\omega+i\alpha)b} - e^{-(\omega+i\alpha)c}}{(\omega + i\alpha)}$
5		$f(y) = \begin{cases} e^{-i\omega y} & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i(\omega+\alpha)b} - e^{-i(\omega+\alpha)c}}{\omega + \alpha}$
6		$f(y) = \frac{1}{y^2 + \omega^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\lvert\omega\alpha\rvert}}{\lvert\omega\rvert}$
7		$f(y) = \frac{e^{-\lvert\omega y\rvert}}{\lvert\omega\rvert} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2}$
8		$f(y) = e^{-\omega^2 y^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\lvert\omega\rvert} e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$
9		$f(y) = y e^{-\omega^2 y^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}\lvert\omega\rvert^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$
10		$f(y) = \frac{4y^2}{(\omega^2 + y^2)^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f} = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\lvert\omega\rvert} - \lvert\alpha\rvert \right) e^{-\lvert\omega\alpha\rvert}$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

Soient les champs $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de classe C^2.
Rappel : l'opérateur $\cdot$ est le produit scalaire euclidien, tandis que $\times$ est le produit vectoriel.

Question 1 *(1 point)* Laquelle des opérations suivantes est la seule à avoir un sens ?

- ☐ $\operatorname{div} f(x) \times \operatorname{rot} F(x)$
- ☐ $\Delta(\Delta f(x) F(x))$
- ☐ $\operatorname{rot}(f(x)F(x)) + f(x) \operatorname{grad}(\operatorname{div} F(x))$
- ☐ $\operatorname{div}(f(x)F(x)) + F(x)$

Question 2 *(1 point)* Développer l'expression $\operatorname{div}(f^2(x)F(x))$.

- ☐ $2\nabla f(x) \cdot F(x) + f^2(x) \operatorname{div} F(x)$
- ☐ $f^2(x) \operatorname{div} F(x) + 2f(x)\nabla f(x) \cdot F(x)$
- ☐ Cette expression n'a pas de sens
- ☐ $f^2(x) \operatorname{div} F(x) + \nabla^2 f(x) \cdot F(x)$

Question 3 *(1 point)* Développer l'expression $\operatorname{rot} \nabla(f(F(x)))$

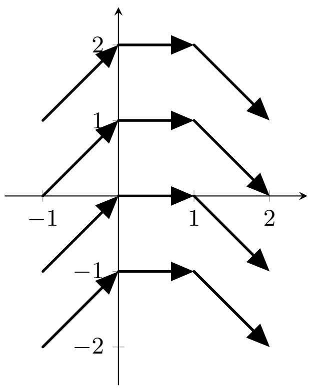
- ☐ $\nabla f(x) \cdot \operatorname{rot} F(x) + \operatorname{rot}(\nabla f(x)) \cdot F(x)$
- ☐ $\Delta f(F(x)) \operatorname{rot}(F(x))$
- ☐ Cette expression n'a pas de sens
- ☐ 0

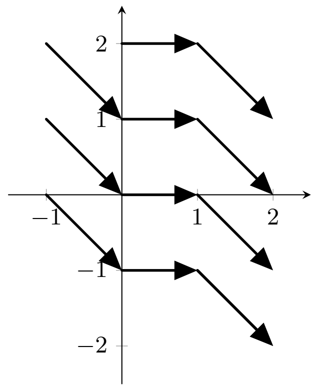
Enoncé

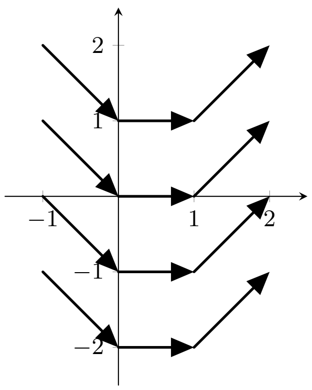
Soit les champs de vecteurs $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définis par

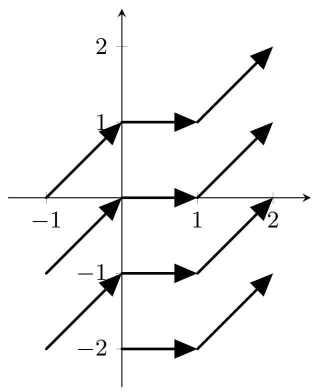
$$F(x,y) = (1, -x), \qquad G(x,y) = (3y + xy^2, x^2y - x).$$

Question 4 *(2 points)* Lequel des graphiques suivants représente F ?

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

Question 5 *(1 point)* Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

☐ $\int_\Gamma F \cdot dl = 0$ pour tout courbe régulière fermée $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$.

☐ $\operatorname{rot} F = 0$

☐ Le domaine de définition de F est simplement connexe.

☐ F dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$.

Question 6 *(3 points)* Soit $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^2$ le bord du triangle de sommets $(-1,0), (0,1)$ et $(1,-1)$. Calculer

$$\int_{\Gamma_2} G \cdot dl,$$

où Γ_2 est parcouru positivement.

☐ 0 ☐ 3 ☐ -6 ☐ -12

Enoncé

Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \sin^2(z),\ 0 \le z \le \pi\}, \qquad E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = z^2\},$$

$$E_3 = \{(x,y,0) \in E_2\}, \quad E_4 = \{(x,y,z) \in E_2 : z < 0\}.$$

Question 7 *(1 poins)* Quel type d'objet est E_1 ?

- ☐ L'ensemble vide
- ☐ Un domaine régulier
- ☐ Une surface régulière
- ☐ Une courbe régulière

Question 8 *(1 point)* Quel type d'objet est E_2 ?

- ☐ L'union de deux surfaces régulières
- ☐ L'union de deux domaines réguliers
- ☐ L'union de deux courbes régulières
- ☐ L'ensemble vide

Question 9 *(1 point)* Quel type d'objet est E_3 ?

- ☐ Une courbe régulière
- ☐ Une surface régulière
- ☐ L'ensemble vide
- ☐ Un domaine régulier

Question 10 *(3 points)* Soit $f(x,y,z) = x + y - z^3$. Calculer

$$\int_{E_4} f\, dl.$$

- ☐ 8π
- ☐ Cette expression n'a pas de sens.
- ☐ -16π
- ☐ $4\sqrt{2}\pi$

Enoncé

Soient les domaines réguliers

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x^2 + y^2 < 9\}, \qquad \Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < z, \ z < 1\}$$

et

$$\Omega_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 > 1, \ x > 0\}.$$

Question 11 *(1 point)* Le bord $\partial\Omega_1$ a deux parties :

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 9\}.$$

Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- ☐ Si Γ_1 a une orientation opposée à celle de Γ_2, alors $\partial\Omega_1$ est orientée positivement.
- ☐ Si Γ_1 est orientée négativement et Γ_2 est orientée positivement, alors $\partial\Omega_1$ est orientée négativement.
- ☐ Si Γ_1 et Γ_2 sont toutes deux orientées positivement, alors $\partial\Omega_1$ n'est orientée ni positivement, ni négativement.
- ☐ Si Γ_1 et Γ_2 sont toutes deux orientées négativement, alors $\partial\Omega_1$ est orientée positivement.

Question 12 *(3 points)* Le bord $\partial\Omega_2$ est composé de deux parties :

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z, \ z \leq 1\} \text{ paramétrée par } \alpha(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r^2)$$

et

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z, \ z = 1\} \text{ paramétrée par } \beta(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 1)$$

Considérons les normales associées $\alpha_r \times \alpha_\theta$ et $\beta_r \times \beta_\theta$. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- ☐ $\alpha_r \times \alpha_\theta$ est extérieure et $\beta_r \times \beta_\theta$ est intérieure
- ☐ $\alpha_r \times \alpha_\theta$ et $\beta_r \times \beta_\theta$ sont toutes deux intérieures.
- ☐ $\alpha_r \times \alpha_\theta$ et $\beta_r \times \beta_\theta$ sont toutes deux extérieures.
- ☐ $\alpha_r \times \alpha_\theta$ est intérieure et $\beta_r \times \beta_\theta$ est extérieure

Question 13 *(3 points)* Calculer l'aire de Σ_1.

Indication : $\int \sqrt{x}\, dx = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$

- ☐ $\text{Aire}(\Sigma_1) = \dfrac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$
- ☐ $\text{Aire}(\Sigma_1) = 5\pi.$
- ☐ $\text{Aire}(\Sigma_1) = 5\sqrt{5}\pi.$
- ☐ $\text{Aire}(\Sigma_1) = \dfrac{5\sqrt{5}\pi}{6}.$

Question 14 *(2 points)* Soit le champs de vecteurs

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2xz}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2yz}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-1}{x^2 + y^2}\right).$$

Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- ☐ F dérive d'un potentiel sur Ω_3.
- ☐ F ne dérive d'un potentiel nulle part dans $\mathbb{R}^3$.
- ☐ F dérive d'un potentiel sur Ω_2
- ☐ F dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^3$.

Enoncé

Soit $T > 0$, et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{T}{2}\right[\\ -1 & \text{si } x \in \left[\frac{T}{2}, T\right[\end{cases}$$

étendue par T-périodicité à $\mathbb{R}$. Sa série de Fourier est donnée par

$$Ff(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi\,(2n+1)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\,(2n+1)\,x\right).$$

Question 15 *(1 point)* Laquelle des égalités suivantes est **fausse** ?

- ☐ $|Ff(x)| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \frac{kT}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
- ☐ $Ff(\frac{T}{2}) = 0$
- ☐ $Ff(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$
- ☐ $Ff(2T) = 1$

Question 16 *(3 points)* Calculer

$$S \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)^2.$$

- ☐ $3\pi^2/16$
- ☐ $\pi^2/8$
- ☐ $-\pi^2/8$
- ☐ $\pi^2/16$

Enoncé

Répondre aux questions suivantes à l'aide de la transformée de Fourier. On admettra que toutes les intégrales convergent et que la transformée est applicable.

Question 17 *(1 point)* Laquelle des intégrales suivantes n'est pas un nombre réel ?

- ☐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (1-|x|)e^{-|x|+3ix}\,dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{4}+3ix}\,dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}+3ix}\,dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x|}{2}+3ix}\,dx$

Question 18 *(2 points)* L'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} te^{-2t^2}\sin(4t)dt$$

est égale à :

- ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-3/2}$
- ☐ 0
- ☐ $3\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$
- ☐ $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-2}$

Question 19 *(2 points)* L'intégrale

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(t/4)}{t^2}\,dt$$

est égale à :

- ☐ $\dfrac{\pi}{4}$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2}$
- ☐ $\sin\left(\dfrac{2}{\pi}\right)e^{-1/2}$
- ☐ Cette intégrale est divergente

Question 20 *(2 points)* Soit une solution $u \in C^3(\mathbb{R})$ intégrable de l'équation différentielle

$$4u'''(x) - xu(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $\hat{u}$ dénote la transformée de Fourier de u et C est une constante réelle arbitraire, alors

- ☐ $\hat{u}(\alpha) = Ce^{-\alpha^4}$
- ☐ $\hat{u}(\alpha) = Ce^{-i\alpha^4}$
- ☐ $\hat{u}(\alpha) = Ce^{\alpha^4}$
- ☐ $\hat{u}(\alpha) = Ce^{i\alpha^4}$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 21: *Cette question est notée sur 15 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7
☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 15

Vérifier le théorème de Stokes pour le champs vectoriel F et la surface Σ définis par

$$F(x,y,z) = (-z, x, z), \qquad \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1 - y \text{ et } x, y, z \geq 0 \}.$$

Question 22: *Cette question est notée sur 11 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 ☐11

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, de période $T = 2\pi$ telle que

$$f(x) \;=\; \cosh(x) \;=\; \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \,]-\pi, \pi].$$

(a) La fonction f est-elle régulière par morceaux ? Justifier votre réponse.

(b) Calculer la série de Fourier Ff en coefficients réels.

(c) A l'aide de ce qui précède et de résultats du cours (en vérifiant bien les hypothèses), calculer les séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Question 23: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

(a) Soit $\omega > 0$. Vérifier que la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = e^{-\omega|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

est bien définie, puis la calculer explicitement (sans utiliser la table des transformées).

(b) En utilisant les propriétés et tables de la transformée de Fourier, trouvez une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation

$$y(x) + 2y''(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \big(y''''(t) - 4y''(t) + 4y(t)\big)\, e^{-\sqrt{2}|x-t|}\, dt = 5e^{-5x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Espace supplémentaire