Ens. : D. Strütt
Analyse III (IN MT SC SIE SV) - (n/a)
12.01.2021
Durée : 120 minutes

n/a

n/a

SCIPER : **999999** Signature :

- **Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.**
- **Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages, les dernières pouvant être vides.**
- **L'examen contient 7 exercices valant un total de 53 points.**
- **Ne pas dégrafer.**
- **Lisez les règles dans l'encadré ci-dessous et signez la première page de l'examen.**

- **Aucun document et aucune machine électronique ne sont autorisés.**
- **La carte d'étudiant est obligatoire et sera contrôlée.**
- **L'examen n'est enregistré qu'après signature par l'étudiant à la remise de sa copie.**
- **Rédiger à l'encre noire ou bleue. Toute autre couleur n'est pas autorisée.**
- **Ce qui est écrit au crayon ne sera pas corrigé.**
- **Les téléphones portables sont éteints et rangés dans les sacs.**
- **Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.**
- **Si les pages prévues pour un exercice ne sont pas suffisantes, continuer l'exercice sur les pages d'un autre exercice. Indiquer clairement, dans l'exercice où il vous manque de la place que la solution continue ailleurs. Indiquer clairement quel exercice est résolu au nouvel endroit.**
- **Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.**

May the force be with you !

Question 1: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

(*i*) Soit la courbe

$$\Gamma = \left\{ \left(\frac{1}{3}t^3, 3t, \frac{\sqrt{6}t^2}{2} \right) \;\middle|\; t \in [-1, 1] \right\}$$

Calculer la longueur de Γ.

(*ii*) Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$F(x, y) = \big(x^2, y\cos(x^2)\big)$$

et Ω, le triangle de sommets $(0, 0)$, $(\sqrt{\pi/2}, 0)$ et $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$. Calculer

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \; dl$$

où ν est le champ de normale extérieure unité à Ω.

Question 2: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 *Réservé au correcteur*

Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$F(x,y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2} \right).$$

(i) Calculer le rotationnel de F .

(ii) Déterminer si F dérive d'un potentiel sur Ω. Si oui, donner un potentiel de F, si non, justifier.

Question 3: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 *Réservé au correcteur*

Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$, $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tel que $\operatorname{div} F = 0$. Définissons $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$G(x,y) = \Big(F_2(-x,y), F_1(-x,y)\Big).$$

Montrer que G dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$.

+1/11/50+

Question 4: *Cette question est notée sur 14 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 *Réservé au correcteur*
☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14

Soit le champ vectoriel $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $F(x,y,z) = (0,x,0)$ et la surface

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)\left(3-\sqrt{x^2+y^2}\right),\ y \geq 0, z \geq 0\right\}$$

Vérifier le théorème de Stokes pour F et Σ.
Indication : On pourra si nécessaire, utiliser les formules suivantes

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Question 5: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

Soit $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x) = -x^2 + 2\pi x.$$

(i) Calculer $F_s f$, la série de Fourier en sinus de f.

(ii) En utilisant des résultats du cours, comparer $F_s f$ et f sur $[0,\pi]$.

Question 6: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 *Réservé au correcteur*

Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases} \qquad \text{étendue par } 2\pi\text{-périodicité.}$$

Les coefficients de Fourier réels de g sont donnés par

$$a_0 = \frac{3\pi}{2} \ ;$$

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \qquad \text{pour tout } n \geq 1 \ ;$$

$$b_n = \frac{1}{n} \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

À l'aide de ceci et d'un résultat vu au cours, calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Question 7: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

(*i*) Donner la définition de la transformée de Fourier d'une fonction, en précisant les hypothèses.

(*ii*) À l'aide des propriétés des transformées de Fourier, trouver $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de

$$-10u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(9u(t) - 4u''(t)\Big) e^{-\frac{3}{2}|x-t|} dt = \frac{4x^2}{(2\pi + x^2)^2}.$$

Si besoin, on pourra s'aider de la table des transformées de Fourier donnée ci-dessous.

	$f(y)$	$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$
1	$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \lvert y\rvert < \lvert b\rvert \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lvert b\rvert\alpha)}{\alpha}$
2	$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } b < y < c \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ib\alpha} - e^{-ic\alpha}}{i\alpha}$
3	$f(y) = \begin{cases} e^{-wy}, & \text{si } y > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (w > 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w + i\alpha}$
4	$f(y) = \begin{cases} e^{-wy}, & \text{si } b < y < c \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(w+i\alpha)b} - e^{-(w+i\alpha)c}}{w + i\alpha}$
5	$f(y) = \begin{cases} e^{-iwy}, & \text{si } b < y < c \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i(w+\alpha)b} - e^{-i(w+\alpha)c}}{w + \alpha}$
6	$f(y) = \frac{1}{y^2 + w^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\lvert w\alpha\rvert}}{\lvert w\rvert}$
7	$f(y) = \frac{e^{-\lvert wy\rvert}}{\lvert w\rvert} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2 + w^2}$
8	$f(y) = e^{-w^2y^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\lvert w\rvert} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$
9	$f(y) = ye^{-w^2y^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}\lvert w\rvert^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$
10	$f(y) = \frac{4y^2}{(y^2 + w^2)^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\lvert w\rvert} - \lvert\alpha\rvert\right) e^{-\lvert w\alpha\rvert}$