

Pour chaque exercice de la série, la numérotation indiquée entre parenthèses ( ) se réfère à la quatrième édition PPUR 2018 du livre *Analyse avancée pour ingénieurs* de B.Dacorogna et C.Tanteri, qui contient les corrigés. Les exercices sans indication auront un corrigé disponible quelques jour après la session d'exercices.

**Exercice 1** (Exercice 1.1, page 7).

Soit

$$F(x, y, z) = (y^2 \sin(xz), e^y \cos(x^2 + z), \ln(2 + \cos(xy))) = (F_1, F_2, F_3).$$

Calculer :

- (i)  $\text{grad } F_1, \text{grad } F_2, \text{grad } F_3$
- (ii)  $\text{div } F$
- (iii)  $\text{rot } F$ .

**Exercice 2** (Exercice 1.2, page 7).

Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^1(\mathbb{R}^3)$  et  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est  $C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ , alors parmi les expressions suivantes lesquelles ont un sens ?

- |                                |                       |                           |
|--------------------------------|-----------------------|---------------------------|
| (i) $\text{grad } f$           | (iv) $\text{div } f$  | (vii) $\text{rot } f$     |
| (ii) $f \text{ grad } f$       | (v) $\text{div}(fF)$  | (viii) $f \text{ rot } F$ |
| (iii) $F \cdot \text{grad } f$ | (vi) $\text{rot}(fF)$ | (ix) $\text{rot div } F$  |

**Exercice 3.**

Soient  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $f$  le champ scalaire défini par

$$f(x) = \frac{1}{\|x - a\|}.$$

Calculer  $\Delta f$ .

*Indication : utiliser un des résultats de l'exercice 4 de la série 1.*

**Exercice 4** (Exercices 1.6 et 1.7, page 8).

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un ouvert. Montrer que :

(i) Si  $f \in C^1(\Omega)$  et  $g \in C^2(\Omega)$ , alors :

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f \Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$$

(ii) Si  $f, g \in C^1(\Omega)$ , alors :

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$$

(iii) Si  $f \in C^1(\Omega)$  et  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  alors :

$$\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \cdot \operatorname{grad} f$$

(iv) Si  $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , alors :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = -\Delta F + \operatorname{grad} \operatorname{div} F,$$

où pour  $F = (F_1, F_2, F_3)$  on note  $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$ .

(v) Si  $f \in C^1(\Omega)$  et  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , alors :

$$\operatorname{rot}(fF) = \operatorname{grad} f \wedge F + f \operatorname{rot} F$$

### Exercice 5.

Soit  $f \in C^2(\Omega)$ , où

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0 \right\}.$$

(i) Montrer que, si

$$g(r, \theta) := f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(x, y),$$

alors

$$\frac{\partial^2 g(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g(r, \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \Delta f(x, y).$$

(ii) Calculer  $\Delta f$  pour

$$f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} + \left( \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right)^2.$$